Intégralo

Matemáticas

8



Comunicación y Lenguaje
Ciencias Sociales
Matemáticas
Ciencias Naturales

PIEDRASANTA

educar

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 1 04/09/2023 13:21:52

Intégralo Matemáticas es una obra colectiva concebida, diseñada y creada por el departamento editorial del Grupo Editorial Educar S.A. a partir del fondo editorial del grupo Educar, bajo la dirección de Luz Dary Hemelberg Rojas.

DESARROLLO DE CONTENIDOS

Matemáticas

Maria Cristina Pérez De Díaz, Arelis Silva Buitrago, Adriana María Pachón Pinilla, Jeny Alexandra Mejía Osorio, Diana PatriciaGordillo Ballén , Ángel Ramiro González Monroy, Adriana María Gálvez Socarrás, Wilmer Beltrán Tarazona

Contextualizadora para Guatemala: Brenda Denise Grijalva Navas
Autoría de Historia, Geografía y Formación Ciudadana: Irene Piedrasanta
Autoría de Expresión artística: Yesenia Hernández Esteban
Coordinación de contextualización y recopilación de proyectos Guatemala: Daniel Caciá

Equipo Editorial

Dirección general editorial: Luz Dary Hemelberg Rojas
Editores: Alejandra Suárez, Andrea González, Natalia Bahamón, Luisa Esperanza Rincón, Jorge Tulio Galindo, León Andrés Montoya, Ana María Archila Mera, Esteban Forero, Edgar Josué Malagón, Esteban González
Revisión técnica: Alvaro Rafael Campuzano Pineda, Ángela María Martínez Simbaqueba, William Mauricio Buitrago Parra, Carolina Herrera Farfán María Angélica Fonseca L, Ximena Paola Claros Osorio, Diana Alexandra Acosta Méndez.
Revisión técnica, equidad de género y adecuación a la diversidad cultural: Freddery Esneider Hernández Lugo, Manuel Neftalí Riveros Grajales.
Editores de calidad: María Claudia Torres Gil, Sergio Muñoz, Clara Galindo, Cindy Roa, Nhora Parra
Corrección de estilo: Karen Grisales, Julián León, Sonia Esperanza Bravo Ojeda, Egna Libi Márquez Lancheros, Manuela Fajardo, María José Díaz Granados, Alejandro Cuervo Bojacá, Carolina
Salazar Mora, Beatriz Román Campos, Nubia Lucía Buitrago, Freddery E. Hernández, Ana Carolina Orjuela
Coordinador de diseño: Edison Andrés Quiñones Jiménez
Diseño de carátula, diseño de páginas interiores: Sthefania Quintero, Claudia Paola González Rodríguez, Edison Quiñones, Ana María Páez, Magda Morales
Diagramación: Edison Quiñones, Miguel Guzmán, Zulma Hendez, Evely López, Claudia Gonzalez, Mayerlini Bohorquez, María Galindo, Jenny Sánchez Gómez, Nórida Ramírez Ardila, Ana Melo, Ana Páez, Jorge Barrera, Leidy Aldana, Fabby Torres, Adriana Páez, David Rengifo, Cristina Galindo, Fabián Alba, Adriana Páez, Fabby Albeiro Torres V., Adriana Páez Naranjo, Myriam Mora, Nancy Agudelo Sánchez, Iván Ramirez, Sthefania Quintero, Lucía Gaona, Francisco Guerrero, Angie Angulo, Melany Martinez, Juan Camilo Pachón, Paula Acosta Parada.
Ilustración: Germán Uriel Gutiérrez Castrillón.
Documentación: Nelson Mendoza, Natalia Herrera Farfán, León Andrés Montoya Arias, Jorge Andrés Rodríguez Sánchez, Agustín Alexander Mena Hincapié.
Apoyo documentación gráfica: Jenny Paola Dorado, María Alejandra Ceballos
Laboratorio: Colegio Santa Luisa, Bogotá. Beryeni Rodríguez (Rectora), Yamile Monsalve (Subdirectora Académica), Lizeth Bernal (Licenciada en Biología)
Producción: Fabby Albeiro Torres Velásquez

© 2023 Educar Editores S. A.

ISBN libro: 978-958-05-2277-5
Primera impresión 2024
Depósito legal en trámite

Autopista Medellín km 3.4 - Vía Bogotá - Siberia, Centro Empresarial Metropolitano - Edificio CEN Piso 4. Bogotá, D. C., Colombia. PBX: 8 764300 www.educar.com.co - Facebook: Grupo Editorial Educar - Twitter: @EducarEditores
Impreso en Guatemala

Todos los derechos reservados. Esta obra no puede ser reproducida, ni archivada o transmitida total o parcialmente, por medio alguno sin autorización escrita de la Editorial.

Intégralo cuatro áreas es una propuesta pedagógica del **Grupo Editorial Educar** y de la **Editorial Piedrasanta** para los grados de secundaria, que incluye la posibilidad de que se armen los integrados de acuerdo con las áreas de interés de cada institución, en un sólo texto, las cuatro áreas básicas.

- **Comunicación y Lenguaje**
- **Matemáticas**
- **Ciencias Naturales**
- **Ciencias Sociales**

Comunicación y Lenguaje



En esta área, los contenidos y las actividades están orientados a desarrollar en los estudiantes competencias para:

- Expresarse correctamente con el fin de comunicar ideas, sentimientos y opiniones e interactuar con otros seres de su entorno.
- Comprender y producir textos verbales y no verbales que respondan a diferentes situaciones de comunicación.
- Participar de manera constructiva y crítica en cualquier contexto comunicativo.

Matemáticas



En esta área, los contenidos y las actividades están orientados a desarrollar en los estudiantes competencias para:

- Manejar procedimientos y algoritmos matemáticos, y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos.
- Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana.
- Utilizar diferentes registros de representación y sistemas de datos para expresar ideas matemáticas.

Ciencias Naturales



En esta área, los contenidos y las actividades están orientados a desarrollar en los estudiantes competencias para:

- Conocer, valorar y cuidar el entorno natural.
- Formar parte activa y responsable en la conservación del planeta.
- Aproximarse al conocimiento científico mediante la observación de diferentes fenómenos del entorno.

Ciencias Sociales



En esta área, los contenidos y las actividades están orientados a desarrollar en los estudiantes competencias para:

- Apropiarse de los conceptos propios del área para comprender la realidad.
- Interpretar y comprender hechos sociales con el fin de promover la convivencia pacífica.
- Asumir una posición crítica y ética frente a las injusticias sociales.

Conoce tu libro de Matemáticas

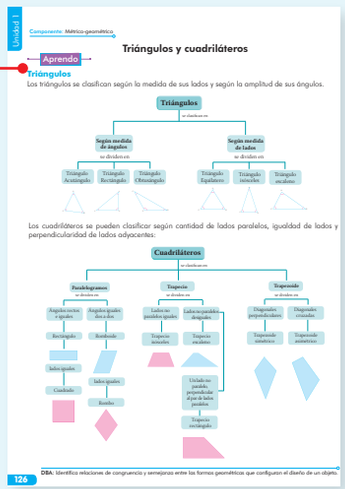
Matemáticas posibilita el desarrollo de aprendizajes significativos para ser **matemáticamente competentes**.

El bloque de matemáticas está organizado en cuatro **unidades**. Cada unidad incluye las siguientes secciones:

Aprendo

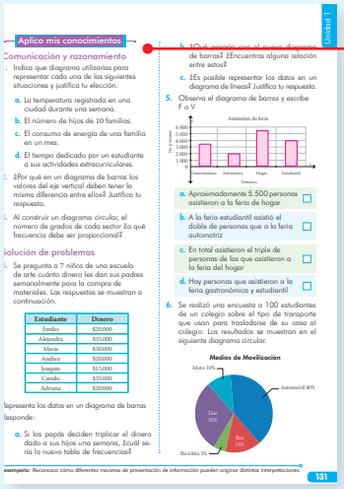
Sección Enmarcada dentro del saber y saber hacer. Se realiza el desarrollo temático desde los Estándares Básicos de Aprendizaje (EBA), los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y los componentes del área. Incluye la explicación y ejercicios de modelamiento (paso a paso).

- ✓ **Pensamiento numérico variacional**
- ✓ **Pensamiento métrico espacial**
- ✓ **Pensamiento aleatorio**


Unidad 1
Componente: Métrico-geométrico
Triángulos y cuadriláteros
Aprendo
Triángulos
Los triángulos se clasifican según la medida de sus lados y según la amplitud de sus ángulos.
Triángulos
se clasifican en
Según medida de ángulos
se dividen en
Triángulo Acutángulo
Triángulo Rectángulo
Triángulo Obtusángulo
Según medida de lados
se dividen en
Triángulo Equilátero
Triángulo Isósceles
Triángulo escaleno
Los cuadriláteros se pueden clasificar según cantidad de lados paralelos, igualdad de lados y perpendicularidad de lados adyacentes:
Cuadriláteros
se clasifican en
Paralelogramos
se dividen en
Trapecio
se dividen en
Trapezoide
se dividen en
Ángulos rectos y no iguales
Ángulos iguales dos a dos
Rectángulo
Lados iguales
Cuadrado
Rombo
Lados iguales
Lados no iguales paralelos iguales
Lados no iguales no paralelos
Trapecio isósceles
Trapecio escaleno
Unlados no paralelos perpendiculares a par de lados paralelos
Trapecio rectángulo
Diagonales perpendiculares
Diagonales congruentes
Trapezoide simétrico
Trapezoide asimétrico
126
DBA: Identifica relaciones de congruencia y semejanzas entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto.

Aplico mis conocimientos

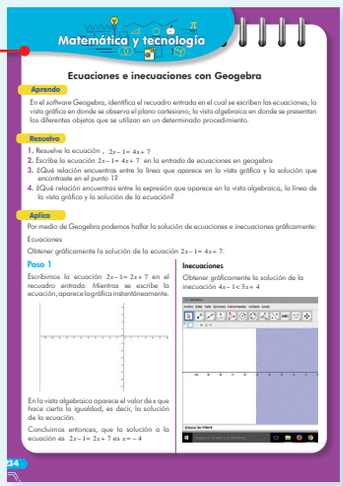
Incluye actividades y preguntas enfocadas a desarrollar las competencias para bachillerato que evalúa la prueba Saber. Es un espacio para que los estudiantes practiquen las competencias de los saberes aprendidos mediante actividades significativas de **comunicación**, **razonamiento** y **solución de problemas**.


Unidad 1
Aplico mis conocimientos
Comunicación y razonamiento
1. Indica que diagrama utilizarías para representar cada una de las siguientes situaciones y justifica tu elección.
a. La temperatura registrada en una ciudad durante una semana.
b. El número de hijos de 10 familias.
c. El consumo de energía de una familia en un mes.
d. El tiempo dedicado por un estudiante a sus actividades extracurriculares.
2. ¿Por qué en un diagrama de barras los valores del eje vertical deben tener la misma diferencia entre ellos? Justifica tu respuesta.
3. Al construir un diagrama circular, el número de grados de cada sector ¿a qué frecuencia debe ser proporcional?
Solución de problemas
4. Se pregunta a 7 niños de una escuela de arte cuánto dinero les dan sus padres semanalmente para la compra de materiales. Las respuestas se muestran a continuación.
Estudiante | Dinero
Emilio | $20.000
Alejandra | $35.000
María | $30.000
Andrea | $20.000
Joaquín | $15.000
Camilo | $35.000
Adriana | $20.000
Representa los datos en un diagrama de barras
Responde:
a. Si los papás deciden triplicar el dinero dado a sus hijos una semana, ¿cuál sería la nueva tabla de frecuencias?
b. ¿Qué fracción de los estudiantes tiene más de $20.000 de mesada?
c. ¿Es posible representar los datos en un diagrama de líneas? Justifica tu respuesta.
5. Observa el diagrama de barras y escribe F o V
Asistentes de feria
Tipo de persona
Asistencia
Tendencia
a. Aproximadamente 5.500 personas asistieron a la feria de hogar
b. A la feria estudiantil asistió el doble de personas que a la feria automotriz
c. En total asistieron el triple de personas de las que asistieron a la feria del hogar
d. Hay personas que asistieron a la feria gastronómica y estudiantil
6. Se realizó una encuesta a 100 estudiantes de un colegio sobre el tipo de transporte que usan para trasladarse de su casa al colegio. Los resultados se muestran en el siguiente diagrama circular.
Medios de Movilización
Moto 10%
Automóvil 40%
Taxi 20%
Bus 15%
Bicicleta 5%
Recuerda: Reconoce cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones.
131

Matemáticas y tecnología

En esta sección se trabaja la matemática aplicada a la tecnología que se utiliza en la vida cotidiana; dispositivos o programas que nos permiten aplicar la teoría vista en todo el bloque.

- ✓ **Aprendo**
- ✓ **Practico y aplico**


Matemática y tecnología
Ecuaciones e inecuaciones con Geogebra
Aprendo
En el software Geogebra, identifica el recuadro entrada en el cual se escriben las ecuaciones; la vista gráfica en donde se observa el plano cartesiano; la vista algebraica en donde se presentan los diferentes objetos que se utilizan en un determinado procedimiento.
Resuelvo
1. Resuelve la ecuación $2x-1=4x+7$
2. Escribe la ecuación $2x-1=4x+7$ en la entrada de ecuaciones en geogebra
3. ¿Qué relación encuentras entre la línea que aparece en la vista gráfica y la solución que encontraste en el punto 1?
4. ¿Qué relación encuentras entre la expresión que aparece en la vista algebraica, la línea de la vista gráfica y la solución de la ecuación?
Aplica
Por medio de Geogebra podemos hallar la solución de ecuaciones e inecuaciones gráficamente:
Ecuaciones
Obtener gráficamente la solución de la ecuación $2x-1=4x+7$.
Paso 1
Escribimos la ecuación $2x-1=2x+7$ en el recuadro entrada. Mientras se escribe la ecuación, aparece la gráfica instantáneamente.
En la vista algebraica aparece el valor de x que hace cierta la igualdad, es decir, la solución de la ecuación.
Concluimos entonces, que la solución a la ecuación es $2x-1=2x+7$ es $x=-4$
Inecuaciones
Obtener gráficamente la solución de la inecuación $4x-1<5x+4$
24

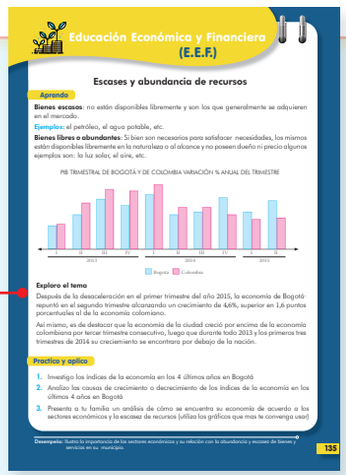
L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 4 04/09/2023 13:21:56

Educación Económica y Financiera

En nuestra serie es un espacio para que los estudiantes mejoren su comprensión de los conceptos, los riesgos y los productos y servicios financieros, y desarrollan las habilidades y la confianza para ser más conscientes de los riesgos financieros y de las oportunidades, y así tomar decisiones financieras informadas para mejorar su bienestar.

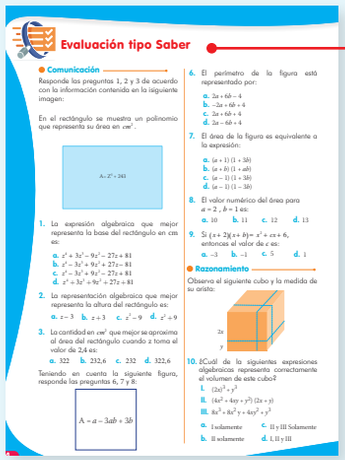
✓ **Aprendo**

✓ **Practico y aplico**



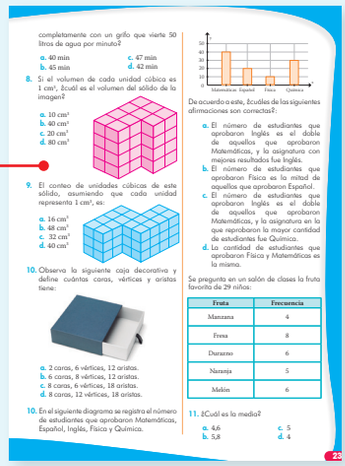
Evaluación tipo Saber

La evaluación tipo Saber aparece en todas las unidades. Se realizan preguntas que ayudan a los estudiantes a fortalecer las competencias y habilidades que evalúa la prueba nacional sobre los temas vistos en cada unidad.



Plan de mejoramiento

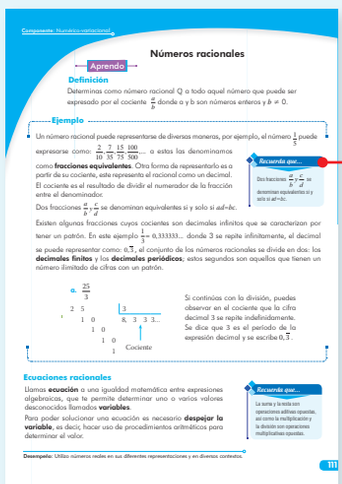
Es una sección que recoge preguntas sobre las temáticas complejas vistas en las anteriores unidades. Se presenta únicamente en la Unidad final de cada área del conocimiento.



Ladillos

Ideas clave...

Encuentran breves explicaciones del tema que se está tratando: propiedades y leyes que refuerzan el conocimiento.



Recuerda que...

Presenta tips cortos del tema que se está tratando, para ver la explicación de otra manera y tener dos visiones del mismo tema.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 5 04/09/2023 13:21:58

Contenido

UNIDAD 1

Reales, figuras planas y estadística

¿Qué aprenderé? 8

Pensamiento Numérico y Variacional

Números racionales 9

Aplico mis conocimientos 11

Números irracionales 12

Aplico mis conocimientos 14

Números reales 15

Aplico mis conocimientos 17

Polinomios 18

Aplico mis conocimientos 20

Operaciones entre polinomios 21

Aplico mis conocimientos 23

Pensamiento métrico y geométrico

Triángulos y cuadriláteros 24

Aplico mis conocimientos 26

Pensamiento Aleatorio

Gráficos estadísticos 27

Aplico mis conocimientos 29

Medidas de tendencia central para datos agrupados y no agrupados 30

Aplico mis conocimientos 32

Educación económica y financiera

Escases y abundancia de recursos 33

Evaluación tipo Saber 34

UNIDAD 2

Factorización, circunferencia y tendencia no central

¿Qué aprenderé? 36

Pensamiento Numérico y Variacional

Productos notables 37

Aplico mis conocimientos 39

Factor común 40

Aplico mis conocimientos 41

Trinomios y triángulo de Pascal 42

Aplico mis conocimientos 45

Diferencia de cuadrados perfectos 47

Aplico mis conocimientos 48

Cubo perfecto de binomios 49

Aplico mis conocimientos 50

Sumas o diferencias 51

Aplico mis conocimientos 52

Cocientes notables 53

Aplico mis conocimientos 55

Regla de Ruffini o división sintética 56

Aplico mis conocimientos 58

Pensamiento métrico y geométrico

Círculo y circunferencia 59

Aplico mis conocimientos 62

Pensamiento Aleatorio

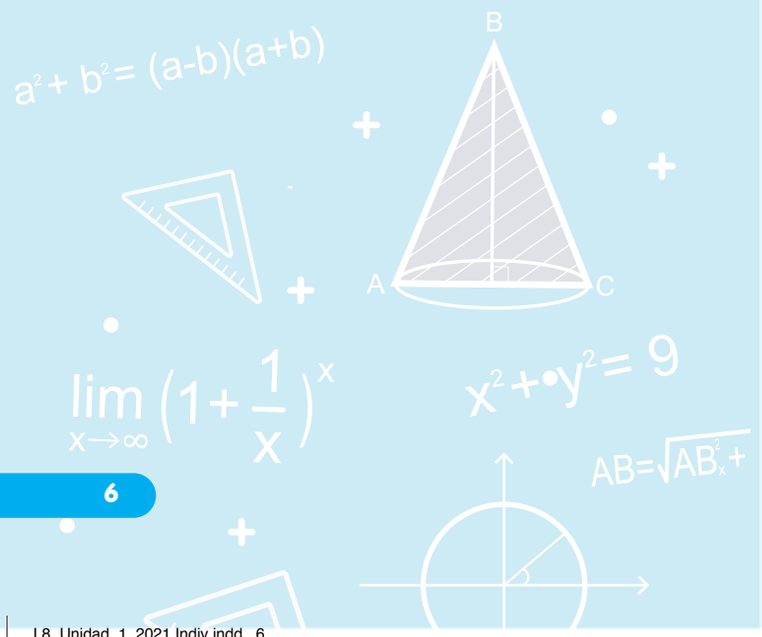
Medidas de tendencia no central. 63

Aplico mis conocimientos 65

Educación económica y financiera

Costos y utilidades 66

Evaluación tipo Saber 68



L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 6 04/09/2023 13:21:58

UNIDAD 3

Ecuaciones, geometría plana y medidas de dispersión

¿Qué aprenderé? ... 70

Pensamiento Numérico y Variacional

Expresiones racionales ... 71
Aplico mis conocimientos ... 72
Mínimo común múltiplo de polinomios ... 73
Aplico mis conocimientos ... 74
Máximo común divisor de polinomios ... 75
Aplico mis conocimientos ... 76
Operaciones aditivas entre expresiones racionales ... 77
Aplico mis conocimientos ... 78
Operaciones multiplicativas entre expresiones racionales ... 79
Aplico mis conocimientos ... 80
Expresiones racionales compuestas ... 81
Aplico mis conocimientos ... 82
Identidades y ecuaciones ... 83
Aplico mis conocimientos ... 84
Ecuaciones equivalentes ... 85
Aplico mis conocimientos ... 86
Ecuaciones con una incógnita ... 87
Aplico mis conocimientos ... 89
Planteamiento y resolución de ecuaciones ... 90
Aplico mis conocimientos ... 91
Desigualdades e inecuaciones lineales ... 92
Aplico mis conocimientos ... 94

Pensamiento métrico y geométrico

Áreas y perímetros ... 95
Aplico mis conocimientos ... 97

Pensamiento Aleatorio

Medidas de dispersión ... 98
Aplico mis conocimientos ... 100

Educación económica y financiera

Planeación de presupuestos ... 101
Evaluación tipo Saber ... 102

UNIDAD 4

Funciones, sólidos y probabilidad

¿Qué aprenderé? ... 104

Pensamiento Numérico y Variacional

Sucesiones ... 105
Aplico mis conocimientos ... 106
Progresiones ... 107
Aplico mis conocimientos ... 108
Magnitudes proporcionales ... 109
Aplico mis conocimientos ... 110
Concepto de función – función lineal ... 111
Aplico mis conocimientos ... 112
Ecuación lineal ... 113
Aplico mis conocimientos ... 114

Pensamiento métrico y geométrico

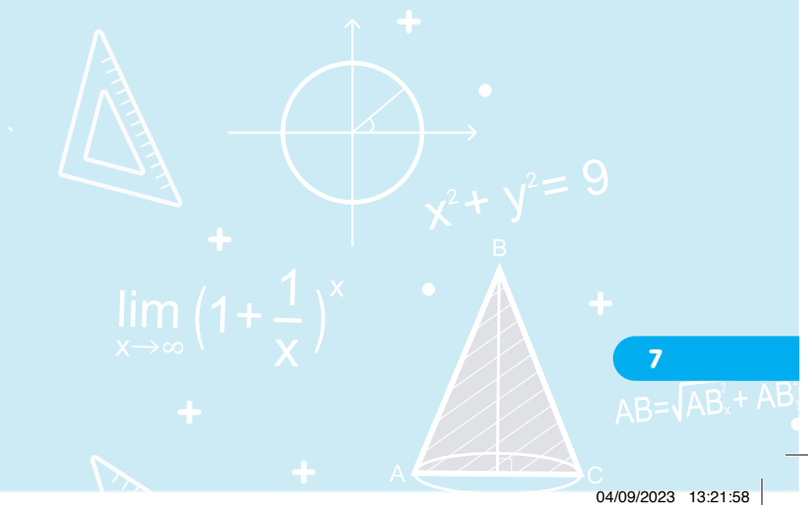
Cuerpos geométricos ... 115
Aplico mis conocimientos ... 118
Volumen y área superficial ... 119
Aplico mis conocimientos ... 121

Pensamiento Aleatorio

Técnicas de conteo ... 122
Aplico mis conocimientos ... 124
Probabilidad ... 125
Aplico mis conocimientos ... 127

Matemática y tecnología

Ecuaciones con Geogebra ... 128
Evaluación tipo Saber y plan de mejoramiento ... 130
Bibliografía ... 132



L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 7 04/09/2023 13:21:58

Unidad 1

Reales, figuras planas y estadística

¿Qué aprenderé?

- Los números reales
- Triángulos y cuadriláteros
- Estadística para datos agrupados y no agrupados

¿Qué lograré?

¿Qué lograré?

- ✔ Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- ✔ Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
- ✔ Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.
- ✔ Aplicar los pasos fundamentales de un estudio estadístico para la interpretación TIC de un sistema de datos.



Números racionales

Aprendo

Definición

Determinas como número racional $\mathbb{Q}$ a todo aquel número que puede ser expresado por el cociente $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

Ejemplo

Un número racional puede representarse de diversas maneras, por ejemplo, el número $\frac{1}{5}$ puede expresarse como $\frac{2}{10}, \frac{7}{35}, \frac{15}{75}, \frac{100}{500} \ldots$ a estas las denominamos **fracciones equivalentes**. Otra forma de representarlo es a partir de su cociente, este representa el racional como un decimal.

El **cociente** es el resultado de dividir el numerador de la fracción entre el denominador.

Dos fracciones $\frac{a}{b} y \frac{c}{d}$ se denominan equivalentes si y solo si $ad=bc$.

> **Recuerda que...**
>
> Dos fracciones $\frac{a}{b} y \frac{c}{d}$ se denominan equivalentes si y solo si $ad=bc$.

Existen algunas fracciones cuyos cocientes son decimales infinitos que se caracterizan por tener un patrón. En el ejemplo $\frac{1}{3} = 0.333333\ldots$, donde 3 se repite infinitamente, el decimal se puede representar como $0.\overline{3}$. El conjunto de los **números racionales** se divide en dos: los **decimales finitos** y los **decimales periódicos**; los segundos son aquellos que tienen un número ilimitado de cifras con un patrón.

a. $\frac{25}{3}$

$$
\begin{array}{r|l}
25 & 3 \\
-24 & 8.333 \\
\hline
10 & \\
-9 & \\
\hline
10 & \\
-9 & \\
\hline
10 & \\
-9 & \\
\hline
1 &
\end{array}
\quad \longrightarrow \text{Cociente}
$$

Si continúas con la división, puedes observar en el cociente que la cifra decimal 3 se repite indefinidamente. Se dice que 3 es el período de la expresión decimal y se escribe $0.\overline{3}$.

Ecuaciones racionales

Llamas **ecuación** a una igualdad matemática entre expresiones algebraicas, que te permite determinar uno o varios valores desconocidos llamados **variables**.

Para poder solucionar una ecuación, es necesario **despejar la variable**, es decir, hacer uso de procedimientos aritméticos para determinar el valor.

> **Recuerda que...**
>
> La suma y la resta son operaciones aditivas opuestas, así como la multiplicación y la división son operaciones multiplicativas opuestas.

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 9 04/09/2023 13:22:08

Ejemplos

1. $\frac{3}{7}$ del camino equivalen a 15 km. ¿Cuál es la distancia del recorrido completo?

Planteas la ecuación: $\frac{3}{7}x = 15$

Solucionas la ecuación:

$$3x = 7(15)$$
$$x = \frac{7(15)}{3}$$
$$x = 35km$$

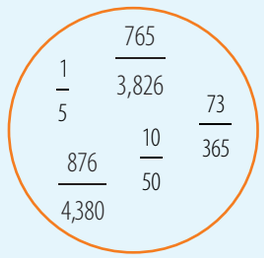
2. Luisa tiene $\frac{3}{5}$ de la edad de su mamá, si su mamá tiene 35 años, ¿cuántos años tiene Luisa?

En este caso, la ecuación planteada es $x = 35\left(\frac{3}{5}\right)$

Resuelves: $x = \frac{35(3)}{5} = 21$. Entonces, Luisa tiene 21 años.

¿Aceptas el reto?

¿Qué fracción no debería estar en el siguiente conjunto?



3. Soluciona la siguiente ecuación: $\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} = \frac{7}{2}x + \frac{1}{9}$. Como se puede observar, existen dos valores de x, aunque ambos representan la misma cantidad, así que tienes la ecuación:

$$\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} - \frac{7}{2}x = \frac{7}{2}x + \frac{1}{9} - \frac{7}{2}x$$
$$\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} - \frac{7}{2}x + \frac{4}{3} = \frac{1}{9} + \frac{4}{3}$$
$$\frac{1}{3}x - \frac{7}{2}x = \frac{1}{9} + \frac{4}{3}$$

Tienes los valores con variable a un lado y los valores numéricos al otro lado de la igualdad.

$$\frac{2-21}{6}x = \frac{1+12}{9} : \frac{-19}{6}x = \frac{13}{9}$$

Realizas las operaciones correspondientes.

Multiplicando en ambos lados por 6

$$-19x = \frac{13}{9}(6)$$

Dividiendo en ambos lados entre –19

$$x = \frac{13(6)}{9(-19)}$$

Valor de la variable.

$$x = -\frac{26}{57}$$

La suma y la resta son operaciones aditivas opuestas, así como la multiplicación y la división son operaciones multiplicativas opuestas.

Aplico mis conocimientos

Comunicación y representación

1. Soluciona las siguientes situaciones planteando la ecuación correspondiente:

a. Daniela devenga $\frac{5}{8}$ del sueldo de Felipe, Daniela devenga Q2,800.00, ¿cuál es el salario de Felipe?

b. La caja de chocolates viene con $\frac{1}{3}$ de ellos de caramelo, si son 5 chocolates de caramelo, ¿cuántos vienen en la caja?

c. Si la distancia que debo recorrer en bicicleta es 12 km y he avanzado $\frac{5}{6}$ del recorrido, ¿cuántos kilómetros me hacen falta por recorrer?

Razonamiento

2. Determina el cociente de los siguientes números racionales expresados en fracción:

a. $\frac{105}{4}$

b. $\frac{25}{3}$

c. $\frac{65}{12}$

d. $\frac{167}{25}$

e. $\frac{45}{42}$

f. $\frac{12}{24}$

g. $\frac{240}{3}$

h. $\frac{187}{18}$

3. Soluciona las siguientes ecuaciones:

a. $5x - 1 = 2$

b. $9a + 7 = 8a - 6$

c. $12m - 4m + 14 = 2m$

d. $\frac{25}{3}m - \frac{8}{5} = \frac{9}{4}$

e. $\frac{2}{7}x + \frac{1}{9} = \frac{12}{5}x - \frac{14}{7}$

Solución de problemas

4. Haciendo uso de ecuaciones, soluciona las siguientes situaciones:

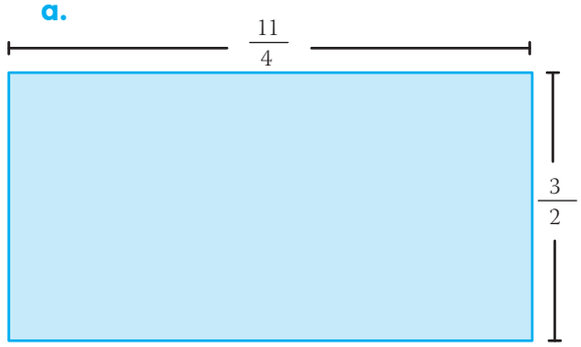
a. El doble de un número adicionado con 5 es 9. ¿Cuál es el número?

b. El producto de un número con 16 menos 1 es igual 79. ¿A qué número se refiere?

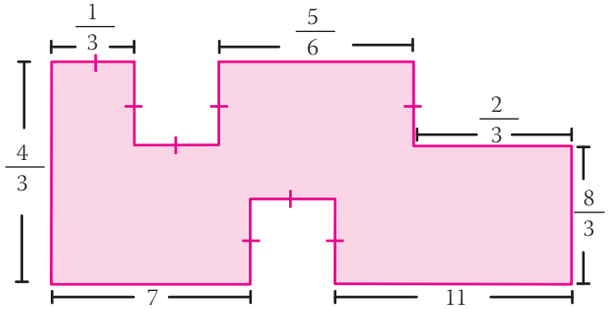
c. El producto de un número con su opuesto aditivo disminuido en 21 es –121. ¿Cuál es el número?

5. Determina el perímetro de las siguientes figuras:

a.



b.



Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 11 04/09/2023 13:22:09

Componente: Numérico-variacional

Números irracionales

Aprendo

Dado un triángulo rectángulo, los **catetos** son los lados que forman el ángulo recto e **hipotenusa** al lado opuesto al ángulo recto, el **teorema de Pitágoras** indica que el valor de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Número irracional

Determinas como número irracional ($\mathbb{I}$) a todo decimal infinito no periódico o aquel número que no puede ser expresado por el cociente $\frac{a}{b}$.

Entre estos tienes:

$\pi \approx 3.14159265358979323 86...$

$\sqrt{2} \approx 1.414213562...$

Al igual que los números racionales, los números irracionales tienen un lugar en la recta numérica. Así, si tienes un número a, siendo a un entero positivo que no es potencia de otro entero positivo, entonces $\sqrt[n]{a}$ es un número irracional.

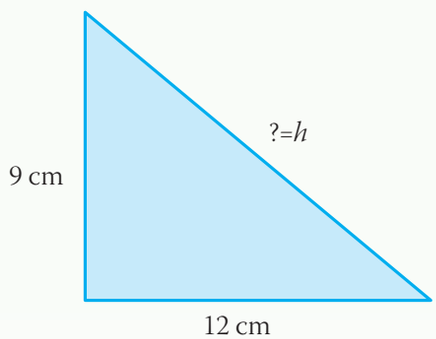
Para facilitar las operaciones de números irracionales, puedes recurrir a propiedades que ellos cumplen:

Dado $a, b, n \in \mathbb{Z}$ entonces $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

Dado $a, b, n \in \mathbb{Z}$ entonces $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Ejemplo

Determina el valor que falta.



$c_1^2 + c_2^2 = h^2$

$9^2 + 12^2 = h^2$

$81 + 144 = h^2$

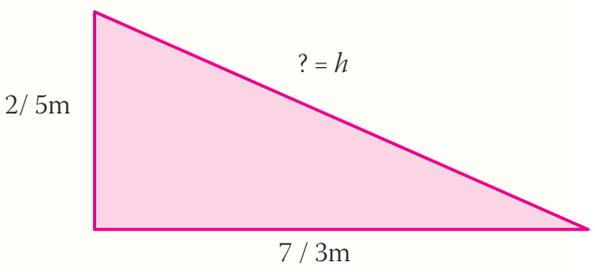
$225 = h^2$

$\sqrt{225} = h$

$15 = h$

Ejemplo

Determina el lado que falta del triángulo.



$c_1^2 + c_2^2 = h^2$

$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = h^2$

$\frac{4}{25} + \frac{49}{9} = h^2$

$\frac{36 + 1,225}{225} = h^2$

$\frac{1,261}{225} = h^2$

$\sqrt{\frac{1,261}{225}} = h$

$\frac{\sqrt{1,261}}{\sqrt{225}} = h$

$\frac{\sqrt{1,261}}{15} = h$

Reconoce la existencia de los números irracionales como números no racionales y los describe de acuerdo con sus características y propiedades.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 12 04/09/2023 13:22:11

Operaciones entre radicales

Llamas **racionalización del denominador** al proceso que se le hace a un número de la forma $\frac{a}{b}$ donde b es una raíz cuadrada que no es exacta, eliminando los radicales del denominador.

Las propiedades de los números irracionales son:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ con } b \neq 0$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Ejemplo

Queremos simplificar la expresión $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$, entonces $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{12}}{12} = \frac{\sqrt{84}}{12}$

Ecuaciones con radicales

Las ecuaciones con radicales reciben el nombre de ecuaciones irracionales y se resuelven aplicando el siguiente proceso:

Paso 1: aísla el radical.

Paso 2: eleva a una potencia tal que se elimine el radical. Esta operación debe repetirse las veces que sea necesario para obtener una ecuación sin radicales.

Paso 3: halla el valor de la incógnita.

Paso 4: verifica el resultado sustituyendo el valor encontrado en la ecuación original para descartar las soluciones inconsistentes.

Ejemplo

$$\sqrt[3]{25 + \sqrt{x^2 + 3}} = 3$$

Solución

Para poder cancelar la raíz cubica, elevas ambas expresiones al cubo.

$$\left(\sqrt[3]{25 + \sqrt{x^2 + 3}}\right)^3 = 3^3$$

$$25 + \sqrt{x^2 + 3} = 27$$

Como si se tratara de una ecuación con racionales, restas en ambos lados de la igualdad 25.

$$25 + \sqrt{x^2 + 3} - 25 = 27 - 25$$

Simplificando términos semejantes.

$$\sqrt{x^2 + 3} = 2$$

Nuevamente, para cancelar la raíz cuadrada elevas al cuadrado en ambos lados de la igualdad.

$$\left(\sqrt{x^2 + 3}\right)^2 = 2^2$$

Operando y restando 3 en ambos lados , obtienes:

$$x^2 + 3 - 3 = 4 - 3$$

$$x^2 = 1$$

Sacando raíz en ambos lados para cancelar el cuadrado que acompaña la variable, nos queda:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

$$x = 1$$

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 13 04/09/2023 13:22:11

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a. $\sqrt{\frac{15}{26}}$

b. $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$

c. $\frac{6}{\sqrt{12}}$

d. $\sqrt{\frac{12}{36}}$

e. $\sqrt{\frac{9}{15}}$

f. $\sqrt{\frac{53}{25}}$

g. $\frac{\sqrt{756}}{\sqrt{10}}$

h. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{24}}$

2. Soluciona las siguientes ecuaciones, no olvides verificar tus respuestas para determinar si son válidas:

a. $\sqrt[3]{15+\sqrt{x}} = 9$

b. $\sqrt{x+\sqrt{2}} = \sqrt{8}$

c. $\sqrt[4]{8+\sqrt{x-1}} = 1$

d. $\sqrt[3]{x+4} = \sqrt{5}$

e. $\sqrt{34-\sqrt{x}} = 6$

f. $\sqrt[3]{x^3+1} = 12$

g. $25 = \sqrt[3]{8x}$

h. $\frac{2}{5} = \sqrt{6+\sqrt{x}}$

i. $\sqrt[3]{\frac{x}{1}} = 30$

j. $\frac{5}{21} = \sqrt[5]{\frac{1}{x}}$

3. Indica si los siguientes números son o no números irracionales.

a. $\frac{105}{4}$

b. $\sqrt{121}$

c. $\frac{65}{12}$

d. $\sqrt{24}$

e. $\sqrt{432}$

f. $\sqrt{516}$

g. $\frac{240}{3}$

h. $\frac{187}{18}$

Solución de problemas

En las preguntas 4 y 5 selecciona la respuesta correcta:

4. La expresión $\frac{b+2}{6b+12}$ tiene solución en los reales si

a. b es distinto de -2
b. todo es real
c. b es distinto de 2
d. b es distinto de 0

5. Un número irracional es

a. todo aquel que no sea racional.
b. todo número que tiene raíz.
c. toda raíz que no es exacta.
d. todo número real.

6. La energía cinética de un automóvil en movimiento está dada por la expresión $E = \frac{1}{2}mV^2$. Donde "E" es la energía, "m" es la masa y "V" es la velocidad.

a. Halla la energía cinética de un automóvil si el valor de su masa es de $\sqrt{2}$ y el de su velocidad es de $\sqrt{2}+1$.

b. Determina el valor de su velocidad si el valor de su energía cinética es de 2 y el valor de su masa es de 3.

7. La teoría de la relatividad relaciona la energía con la masa y una constante que es la velocidad de la luz según la siguiente expresión:

$E = m \cdot c^2$
E = energía (Ergios)
m = masa (gramos)
c = velocidad de la luz = 3×10^{11} cm/s

Calcula el valor de la energía en ergios de una masa de 120 gramos.

8. Elige la respuesta que mejor complete esta frase: Al tomar la raíz cuadrada de un número racional

a. se obtiene siempre un número racional.
b. se obtiene siempre un número irracional.
c. nunca se obtiene un número real.
d. se puede obtener un número racional o irracional.

Reconoce la existencia de los números irracionales como números no racionales y los describe de acuerdo con sus características y propiedades.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 14 04/09/2023 13:22:15

Componente: Numérico-variacional

Números reales

Aprendo

El conjunto formado por los **números racionales** $\mathbb{Q}$ y los **números irracionales** $\mathbb{I}$ recibe el nombre de conjunto de los **números reales** $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces x cumple con una y solo una de las siguientes condiciones:

$$x > 0$$
$$x < 0$$
$$x = 0$$

Dados dos números reales a y b, puedes determinar que:

$$a < b \text{ si } a - b < 0$$
$$a > b \text{ si } a - b > 0$$
$$a = b \text{ si } a - b = 0$$

Ejemplo

1. -0.7 y $\frac{1}{3}$

Como un número es positivo y el otro negativo, puedes afirmar que $-0.7 < \frac{1}{3}$.

2. 5.177324 y 5.178324.

Como los dos números tienen la misma parte entera, debes comparar las cifras decimales de izquierda a derecha; la primera cifra en la que difieren es la de las milésimas, así $5.177324 < 5.178324$.

Operaciones aditivas en los reales

Para dos números $a, b \in \mathbb{R}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \pm b = c$.

Ejemplo

Realizamos la siguiente suma de números decimales:

$$\begin{array}{r} 345.87 \\ 285.8 \\ 756.002 \\ 365.25 \\ + \quad 402.303 \\ 339.5 \\ 587.89 \\ \hline 3{,}052.615 \end{array}$$

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 15 04/09/2023 13:22:15

Operaciones multiplicativas en los reales

Para dos números $a,b\in\mathbb{R}$ existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $a\cdot b=c$

De igual forma, para $a,b\in\mathbb{R}$ existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $a\div b=c$ pues $a\div b=a\cdot\frac{1}{b}$ y $\frac{1}{b}\in\mathbb{R}$, con $b\neq 0$.

Potenciación entre números reales

Si $a\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{Z}^+$, entonces la enésima potencia de a es:

$$a^n=a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a \quad (n \text{ veces})$$

En la potencia a^n, a se conoce como base y n como exponente

Propiedades de la potenciación

Para todo $a,m,n\in\mathbb{Z}$ se cumple que:

$$a^0=1$$

$$a^m a^n=a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{a^m}$$

Radicación entre números reales

Si $n\in\mathbb{Z}^+$ la raíz enésima de $a\in\mathbb{Q}$ está representada por: $\sqrt[n]{a}=b$, donde $b^n=a$.

La raíz cuadrada de $a\in\mathbb{Q}^+$ se representa como: $\sqrt{a}$.

Propiedades de la radicación

Para todo $a,m,n\in\mathbb{Z}$ se cumple que:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},b\neq 0$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

$\sqrt[n]{a^n}=a$ si n es impar.

$\sqrt[n]{a^n}=|a|$ si n es par.

Construye representaciones, argumentos y ejemplos de propiedades de los números racionales y no racionales.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 16 04/09/2023 13:22:17

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Soluciona las siguientes operaciones entre números reales:

a. $234+345+183+723$

b. $(7{,}628-637)-1{,}827$

c. $(654)(385)$

d. $6{,}517 \,/\, 176$

e. $(5{,}706)^3$

2. Soluciona los siguientes polinomios aritméticos:

a. $\left[(234-675)45\right]$

b. $\left[(764+239)\div 62\right]$

c. $\left[(766-389)(342+852)\right]$

d. $\left[6^3+(650\div 5)-\sqrt{81}\right]$

e. $\left[\frac{6}{5}\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{7}\right)\right]$

3. Emplea las propiedades de potenciación y radicación para simplificar cada expresión:

a. $2\sqrt{363}-3\sqrt{243}+\sqrt{192}$

b. $2a\sqrt[3]{27x^3y}+3b\sqrt[3]{8x^3y}$

c. $\sqrt[3]{\frac{x^4}{y}}-\sqrt[3]{\frac{x}{y^4}}-\sqrt[3]{\frac{xy}{y^5}}$

Razonamiento

4. Justifica por qué son ciertas o falsas las siguientes igualdades:

a. $\sqrt{b^4}=\sqrt[4]{b}$

b. $a^0=1$

c. $\sqrt[n]{a^n}=a$

d. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}=a^7$

e. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

f. $\sqrt[5]{a}\sqrt{b}=\sqrt[10]{a^2b^5}$

5. Escribe si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. Todo número natural es entero. ☐

b. Todo número entero es natural. ☐

c. Existen números racionales que son irracionales. ☐

d. Existen números irracionales que no pertenecen a los reales. ☐

e. Hay números que no son reales. ☐

f. La multiplicación de tres enteros negativos da como resultado un entero negativo. ☐

g. La multiplicación de dos racionales puede dar como resultado un número irracional. ☐

Solución de problemas

6. En un paseo, por cada niño hay 2 sándwiches y por cada niña 1 sándwich. Si asistieron 45 niños y 36 niñas, ¿cuántos emparedados deben preparar?

7. Un poste de luz tiene enterrado 72 cm y $\frac{43}{2}$ de esta medida por fuera. ¿Cuánto mide el poste de luz?

8. La ganancia de una empresa en el año 2020 fue de Q24,000.00, y $\frac{3}{8}$ de ellas van para impuestos. ¿Con qué dinero quedó la empresa?

9. El radio de la Tierra es aproximadamente de $r=6{,}400$ km, tomando esta como una esfera. Calcula:

a. La superficie de la Tierra si $S=4\pi r^2$.

b. Su volumen, sabiendo que $V=S\times\frac{r}{3}$.

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 17 04/09/2023 13:22:19

Componente: Numérico-variacional

Polinomios

Aprendo

Monomios

Una **expresión algebraica** es la representación matemática de una situación, compuesta por una parte numérica (coeficiente) y por una parte literal (variable). Las expresiones algebraicas se encuentran compuestas por términos, los cuales se separan por signos de adición y sustracción.

Las expresiones algebraicas que tienen un solo término se llaman **monomios**, donde el coeficiente es un número real y los exponentes son enteros no negativos.

Ejemplos de monomios son: $5x$; $-4ab$; d^3; $\frac{1}{7}x^5$; $-8r^2s^3$

Los monomios tienen dos tipos de **grado**, uno **relativo** que se refiere al exponente de cada una de las letras que lo componen y otro **absoluto** que corresponde a la suma de los grados relativos.

$3x^2y^3$

Grado relativo de $x = 2$
Grado relativo de $y = 3$
Grado absoluto 5

Ejemplo

Construye una expresión algebraica para cada una de las siguientes situaciones, identificando el cociente y la variable:

Situación	Expresión algebraica	Coeficiente	Variable
El quinto de un valor	$\frac{1}{5}x$	$\frac{1}{5}$	x
La suma de dos cantidades	$x + y$	1, 1	x, y
El producto de dos valores	xy	1	x, y
El cubo de un número	x^3	1	x
El cociente del doble de un número entre otro	$\frac{2x}{y}$	2	x, y
El triple de un número disminuido por dos	$3x - 2$	3, 2	x

Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica compuesta por la suma y/o la resta de monomios. A estos monomios se les conoce como **términos del polinomio**. Los polinomios que tienen dos términos se conocen como **binomios**, aquellos que tienen tres términos son **trinomios** y aquellos que tienen más de tres se les denomina polinomios.

Características de un polinomio

1. El mayor grado absoluto de los términos del polinomio se denomina **grado absoluto del polinomio**.

Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 18 04/09/2023 13:22:20

2. El grado de un polinomio en relación con una letra es el mayor exponente en relación con esa letra en el polinomio y se denomina **grado relativo de un polinomio**.
3. Un polinomio está ordenado con relación a una letra cuando la escritura de los términos está ordenada por sus potencias en forma ascendente o descendente.
4. Un polinomio de dos o más variables puede ordenarse con respecto a una de ellas.

Términos semejantes de un polinomio

Los términos son semejantes cuando su parte literal es igual, es decir que las variables que conforman la parte literal son las mismas y tienen los mismos exponentes. En un polinomio como $3x^2 - 5x - 4x + 7$, los monomios $-5x$ y $-4x$ son términos semejantes.

Podría decirse que en **un polinomio los términos semejantes son aquellos monomios que tienen el mismo grado relativo con respecto a cada variable**.

Orden de un polinomio

Los polinomios los puedes organizar de manera ascendente o descendente con respecto a la variable; en el caso de que haya más de una variable, debes organizar en orden alfabético.

Ejemplo

Organizamos los siguientes polinomios dependiendo del orden que se pide en cada columna:

Polinomio desordenado	Ordenado descendentemente con respecto a una variable	Ordenado ascendentemente con respecto a una variable
$14x - 5 + 3x^2 - 6x^4$	$-6x^4 + 3x^2 + 14x - 5$	$-5 + 14x + 3x^2 - 6x^4$
$a^2 + a^3 + 1 - 5a^6 + 7a^4$	$-5a^6 + 7a^4 + a^3 + a^2 + 1$	$1 + a^2 + a^3 + 7a^4 - 5a^6$
$-1 + 2y^4 - y^3 + y + y^2$	$2y^4 - y^3 + y^2 + y - 1$	$-1 + y + y^2 - y^3 + 2y^4$
$y^6 + 5x^3y^5 - 3x^2y^2 - 2x^2y^3 + 1$	$y^6 + 5x^3y^5 - 2x^2y^3 - 3x^2y^2 + 1$	$1 - 3x^2y^2 - 2x^2y^3 + 5x^3y^5 + 6$

Valor numérico de un polinomio

Se le considera valor numérico de un monomio al resultado de las operaciones de acuerdo con los valores que se asignan a cada una de las variables.

El **valor numérico de un polinomio** es el resultado de operar los valores numéricos de los monomios que lo conforman según corresponda.

Ejemplo

Para el mes de enero se fabricaron 208 artículos: x=208. Reemplazamos el valor de x:

$7x^2 - 6x + 1$

$7x^2 = 7(208)^2 = 7(43{,}264) = 302{,}848$

$6x = 6(208) = 1{,}248$

$7x^2 - 6x + 1 = 302{,}848 - 1{,}248 + 1 = 301{,}601$

Desempeño: Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 19 04/09/2023 13:22:20

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Expresa en forma algebraica los siguientes enunciados:

a. El producto de dos números.

b. El doble de un número disminuido en 3.

c. El cuadrado de un número sumado con 8.

d. El producto de un número por su opuesto aditivo, sumado con 12.

e. La resta de dos números consecutivos.

Razonamiento

2. Determina el número de términos que tiene cada expresión algebraica:

a. $2x + 9$

b. $6a^2 - 3ab + 2b - 1$

c. $6mn^4$

3. Completa la siguiente tabla determinando el valor numérico en cada caso:

x	3	8	-12
y	-5	13	-6
$3x + 5y - 2xy + 8$			
$12xy - 4x$			
$8x - 6y - 10$			
$134xy$			

4. Determina el grado relativo y el absoluto de las siguientes expresiones algebraicas:

a. $3x^2 - 8x - 9$

b. $3a^4 - 9ab + 12b$

c. $23m^2n + 16mn^2 + 9m - 7n$

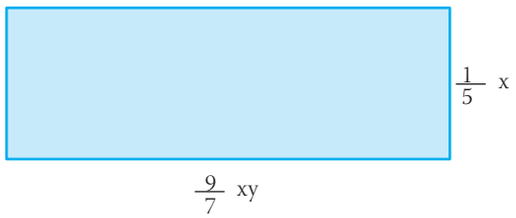
d. $18x - 6y$

e. $18k^5l^3m$

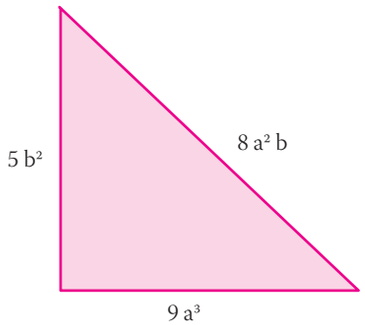
Solución de problemas

5. Establece una expresión que represente el perímetro de las siguientes figuras:

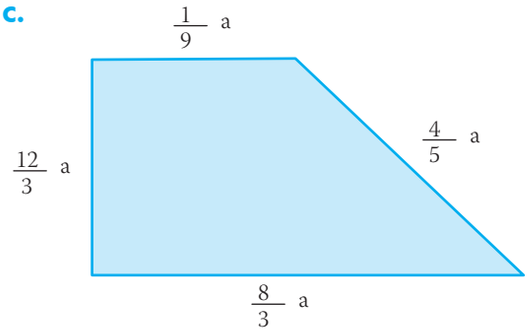
a.



b.



c.



6. Para cada una de las siguientes condiciones, escribe un polinomio que la cumpla o explica porqué no es posible:

a. Un polinomio con tres monomios y variables a, b y c.

b. Un polinomio con grado relativo a p igual a 4 y grado absoluto igual a 3.

c. Un polinomio con grado relativo a x igual a 3 y grado relativo a y igual a 2

d. Un polinomio con grado relativo a x igual a 3 y grado relativo a y igual a 2 y grado absoluto igual a 4.

e. Un polinomio con grado relativo a x igual a 3 y grado relativo a y igual a 2 y grado absoluto igual a 3.

Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 20 04/09/2023 13:22:21

Componente: Numérico-variacional

Operaciones entre polinomios

Aprendo

Suma y resta

Para sumar o restar dos monomios, estos deben ser términos semejantes. El resultado es la suma o resta de los coeficientes de los monomios, conservando la parte literal. Los **términos semejantes** son aquellos que tienen la misma parte literal.

$$5xy \pm 12xy = (5 \pm 12)xy = \begin{cases} \text{al sumar } 17xy \\ \text{al restar } -7xy \end{cases}$$

La técnica para sumar dos o más polinomios consiste en colocar los términos semejantes, es decir, los que tienen la misma parte literal uno junto al otro, y luego reducir los coeficientes numéricos.

La suma de dos polinomios es un polinomio que resulta de la suma de los monomios semejantes. Para facilitar las operaciones se recomienda ordenar los polinomios.

$(8x-2y)+(3x+11y)=8x-2y+3x+11y=(8x+3x)+(-2y+11y)=11x+9y$

La resta de dos polinomios es un polinomio que resulta de realizar la suma del primero por el opuesto aditivo del segundo.

$(8x-2y)-(3x+11y)=(8x+(-3x))+(-2y+(-11y))=5x+(-13)y=5x-13y$

Ejemplo

Realiza la siguiente resta entre polinomios $\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}xy;\frac{1}{7}xy-5x+\frac{6}{5}$

$$\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}xy\right)-\left(\frac{1}{7}xy-5x+\frac{6}{5}\right)$$
$$=\left(\frac{2}{3}x+5x\right)+\left(\frac{5}{2}xy+\left(-\frac{1}{7}xy\right)\right)+\left(-\frac{6}{5}\right)$$
$$=\left(\frac{2+15}{3}x\right)+\left(\frac{35-2}{14}xy\right)-\frac{6}{5}$$
$$=\left(\frac{17}{3}x\right)+\left(\frac{33}{14}xy\right)-\frac{6}{5}$$
$$=\frac{17}{3}x+\frac{33}{14}xy-\frac{6}{5}$$

Multiplicación y división

Multiplicación monomio por monomio

Al multiplicar dos monomios, debes operar:

1. Los signos: teniendo en cuenta las leyes de signos.
2. Los coeficientes.
3. Las variables: teniendo en cuenta las propiedades del producto de los exponentes.

Desempeño: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 21 04/09/2023 13:22:21

Multiplicación monomio por polinomio

Al multiplicar un monomio por un polinomio, multiplicas el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Multiplicación polinomio por polinomio

Al multiplicar dos polinomios, multiplicas cada uno de los términos del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio. Cuando multiplicas dos potencias de igual base, conservas la base y sumas los exponentes. Si $a \in \mathbb{R}$ y $m,n \in \mathbb{Z}$, entonces $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

División de polinomio entre monomio

La división de un polinomio entre un monomio se expresa como el cociente de cada uno de los términos del polinomio (dividendo) entre el monomio (divisor).

División entre polinomios

Para dividir dos polinomios p(x) y q(x) donde el grado del polinomio del dividendo es mayor que el grado del polinomio divisor, realizas los siguientes pasos:

1. Organizas los polinomios de forma descendente respecto a una de las variables, procurando dejar espacios de los términos que no se encuentren.
2. Ubicas los polinomios de la misma forma que haces con la división de números enteros.
3. Divides el primer término del polinomio, dividiendo entre el primer término del polinomio divisor.
4. Multiplicas los términos del cociente por los del divisor, ubicas el resultado de cada producto debajo del término que corresponda del dividendo y haces la resta entre polinomios.
5. Bajas el siguiente término y realizas la misma operación hasta acabar con los términos del dividendo.

Ejemplo

Multiplicando término a término, simplificando términos semejantes.

$$(x+3)(x+4)$$

$$x^2+4x$$

$$+3x+12$$

$$x^2+7x+12$$

Ejemplo

$$\begin{array}{r|l} x^2+7x+12 & 2x+2 \\ \hline -x^2-x & \frac{1}{2}x+3 \\ \hline 6x+12 & \\ -6x-6 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

División inexacta, dado que el residuo no es cero.

Procedimiento	
$\frac{x^2}{2x}=\frac{1}{2}x$	Divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.
$\frac{1}{2}x\cdot 2x=x^2$ $\frac{1}{2}x\cdot 2=x$	Multiplica cada término del divisor por el cociente y el resultado lo restas con el dividendo, simplificas términos semejantes y obtienes el nuevo dividendo $6x+12$.
$\frac{6x}{2x}=3$	Divide el primer término del nuevo dividendo entre el primer término del divisor.
$3\cdot 2x=6x$ $3\cdot 2=6$	Multiplica cada término del divisor por el cociente y el resultado lo restas con el nuevo dividendo, simplificas términos semejantes y obtienes como residuo 6.

Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 22 04/09/2023 13:22:21

Aplico mis conocimientos

Comunicación

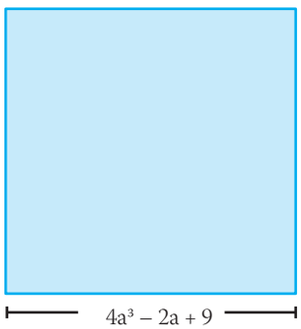
1. Completa la siguiente tabla siguiendo el ejemplo:

Primer factor	Segundo factor	Producto
$x^3 - 1$	$2x$	$2x^4 - 2x$
$2a^2 - 7a$	$3a - 9$	
$4m^3 - 2m^2 - 6m$	$9mn - 14n$	
$12m - 3$		$60m^2 - 15m$
	$-3xy$	$15x^2y + 21xy$

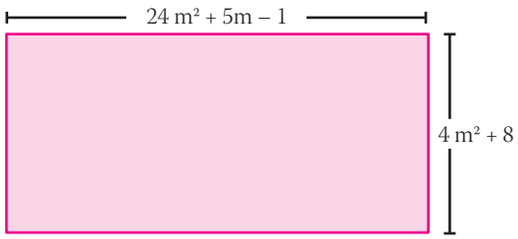
Razonamiento

2. Determina el perímetro de las siguientes figuras:

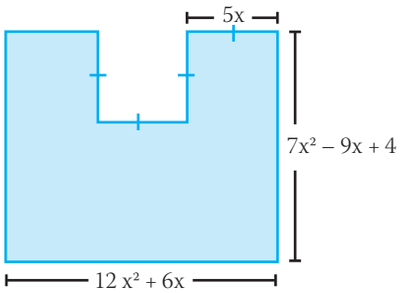
a.



b.



c.



Solución de problemas

3. Elimina los signos de agrupación y opera los términos semejantes.

a. $12a^3 - (6a + 11a^3)$

b. $24x^3 - (8x + 16)$

c. $-\left[21k^2 + (8k^2 + 7k^3)\right]$

d. $\left[(9a^2 + 5a) - (11a^2 - 16a)\right] + 9a$

e. $\frac{4}{7}m^5 - \left[(26m + 17m^5) - \left(\frac{1}{7}m^5 + \frac{3}{8}m - 7\right)\right]$

4. Multiplica las siguientes expresiones algebraicas:

a. $(5m^3)(2m - 8)$

b. $(12m^2 + 21)(6m - 5)$

c. $\left(\frac{3}{6}x^3 - 5x + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{3}{7}x - 17\right)$

d. $\left(\frac{2}{5}a - 1\right)(2ab - 8b)$

e. $(9mx^3)(12m - 16mx + 16x)$

5. Realiza las siguientes divisiones:

a. $(7a^2 - 9a + 1) \div (a - 2)$

b. $(4a^3 - 9) \div (a - 3)$

c. $(3m^2 - 5m + 4) \div (m - 9)$

d. $(9x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 4x) \div (x + 2)$

e. $(n^2 + 3n - 10) \div (n - 5)$

6. Escribe dos expresiones algebraicas que multiplicadas tengan como resultado cada uno de los monomios.

a. $6x^3$

b. $21ab^3c$

c. $12m^2n^3$

d. $-15x^2y$

e. $\frac{4}{6}s^5t^3$

Desempeño: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 23 04/09/2023 13:22:22

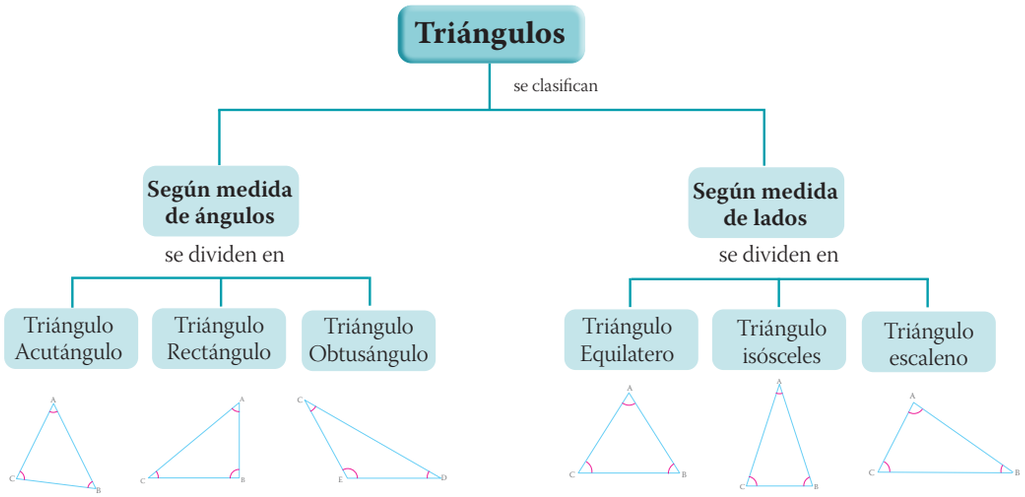
Componente: Métrico-geométrico

Triángulos y cuadriláteros

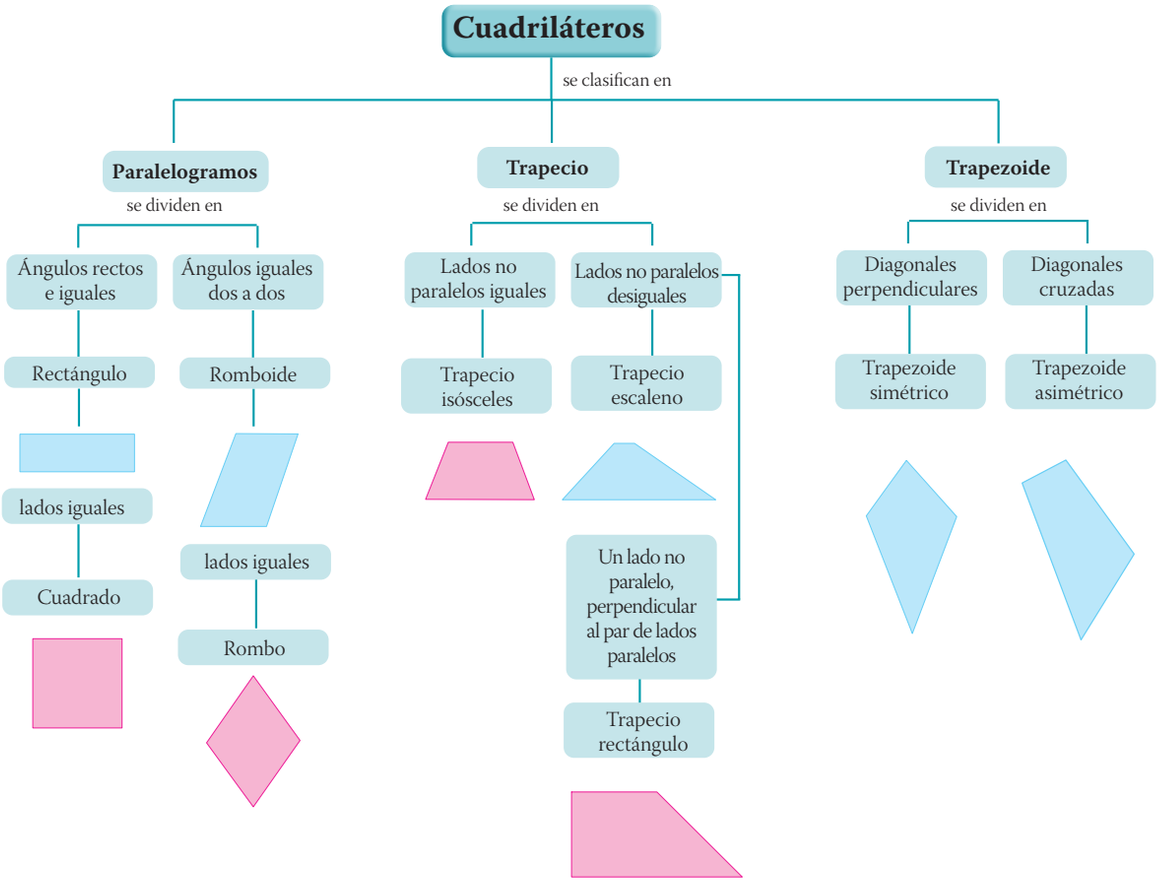
Aprendo

Triángulos

Los **triángulos** se clasifican según la medida de sus lados y según la amplitud de sus ángulos.



Los **cuadriláteros** se pueden clasificar según cantidad de lados paralelos, igualdad de lados y perpendicularidad de lados adyacentes:



Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 24 04/09/2023 13:22:23

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los lados que forman el ángulo recto, llamados **catetos**, es igual al cuadrado de la **hipotenusa**. A esta afirmación se le conoce como el **teorema de Pitágoras**. Los números de las medidas de los catetos y la hipotenusa se denominan **números pitagóricos**.

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Ejemplo

Halla la hipotenusa de un triángulo que tiene un cateto de 90 cm y otro de 120 cm. Usa el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Reemplaza los datos en el teorema, así:

$$h^2 = (90cm)^2 + (120cm)^2$$

$$h^2 = 8{,}100cm^2 + 14{,}400cm^2$$

$$h^2 = 22{,}500\ cm^2$$

Al sacar la raíz cuadrada en cada uno de los lados de la igualdad, obtenemos: $h = 150$ cm. Significa que entre los dos catetos hay una distancia de 150 cm.

Thales de Mileto trabajó dos teoremas en geometría, el siguiente enunciado pertenece a uno de ellos: "Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado".

El triángulo original $OA'B'$, la línea paralela al lado $\overline{A'B'}$ es la línea $\overline{AB}$, por tanto, el nuevo triángulo OAB es semejante al triángulo original. A partir de lo anterior, se obtienen las siguientes razones:

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$ Esto significa que los segmentos de los dos triángulos son proporcionales.

Ejemplo

Si tenemos las medidas de los lados de los triángulos, reemplazamos y resolvemos: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$

$\frac{11m}{9.5m} = \frac{2.44m}{x}$ Reemplazando los datos en el teorema de Thales.

$11m \times x = 9.5m \times 2.44m$ Despejando x y multiplicando en cruz.

$x = \frac{2.44m \times 9.5m}{11m}$ Didiviendo por 11 m.

$x = 2.09m$ Resolviendo las operaciones.

Desempeño: Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.

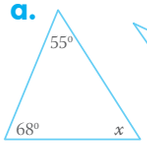
L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 25 04/09/2023 13:22:23

Aplico mis conocimientos

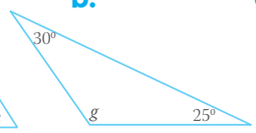
Comunicación y razonamiento

1. Encuentra la medida del ángulo que falta para cada uno de los triángulos:

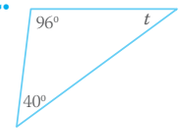
a.



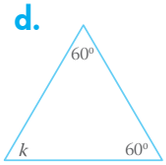
b.



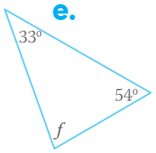
c.



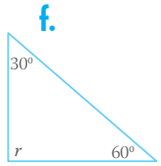
d.



e.



f.

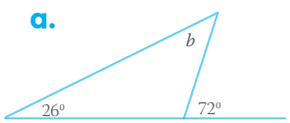


2. Un triángulo isósceles tiene dos ángulos de 55 ° cada uno. Encuentra la medida del tercer ángulo. Dibújalo usando la regla y el compás.

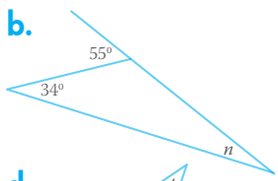
3. Dos ángulos de un triángulo son de 48° y 68°, respectivamente. Encuentra el valor del tercer ángulo. Dibújalo usando la regla y el transportador.

4. Halla las medidas de los ángulos que hacen falta en cada uno de los triángulos:

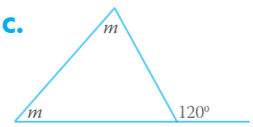
a.



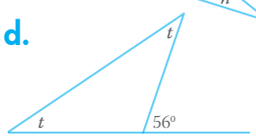
b.



c.

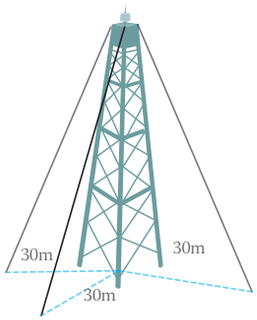


d.

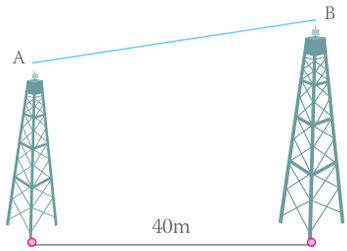


Solución de problemas

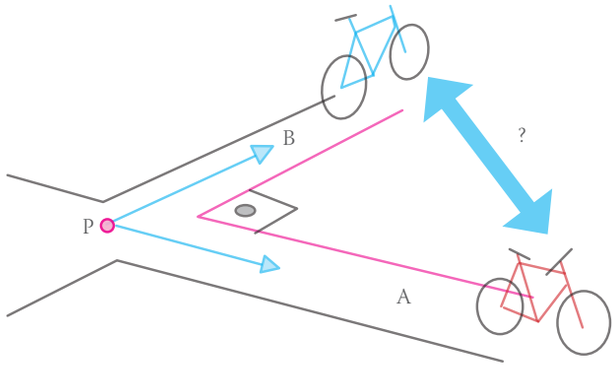
5. Una antena de radio transmisión tiene 72 m de altura y se encuentra apoyada en tres soportes, cada uno de ellos a 30 m de la base de la antena. ¿Cuántos metros tiene el cable de soporte de la antena?



6. Dos torres miden 15 m y 45 m de altura respectivamente, y entre ellas hay una distancia de 40 m. Para ir de una torre hasta la otra se ha hecho uso de un cable áereo que las conecta desde lo más alto de cada una de ellas. ¿Cuál es la longitud del cable?



7. ¿Qué distancia separa a dos ciclistas que partieron al mismo tiempo desde P, uno de ellos a velocidad 15 km/h y el otro ciclista a 20 km/h, después de 4 horas de recorrido?



8. La hipotenusa de un triángulo es de 7 unidades y uno de sus lados mide 5 unidades. ¿Cuál es la medida del otro lado del ángulo recto?

9. Si los dos lados que forman el ángulo recto de un triángulo miden igual y su hipotenusa mide 16 unidades, ¿cuánto mide cada uno de los lados?

10. Utiliza la regla, el lápiz y el transportador para dibujar con precisión:

- **a.** Un triángulo equilátero con la medida del lado de 6 cm.
- **b.** Un triángulo rectángulo cuyos dos lados del ángulo recto midan 6 cm y 8 cm.
- **c.** Un triángulo escaleno con dos de los lados que midan 4 cm y 5 cm, y un ángulo de 70 ° entre las dos partes.

Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto.

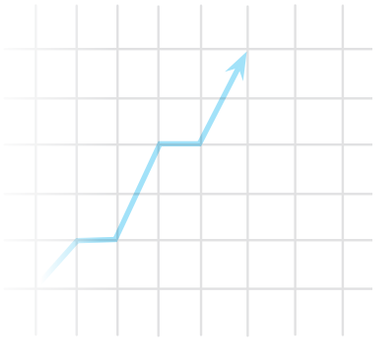
L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 26 04/09/2023 13:22:24

Componente: Aleatorio

Gráficos estadísticos

Aprendo

Distribución de frecuencias



La **distribución de frecuencias** es una tabla en la que se calculan diferentes frecuencias tales como:

La **frecuencia absoluta** (n_i): indica el número de veces que se repite cada dato.

La **frecuencia relativa** (f_i): corresponde al cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos.

La **frecuencia absoluta acumulada** (N_i): es la suma de la frecuencia absoluta y los datos siguientes a él.

Ejemplo

En el periodo 2015 – 2020, la inmobiliaria Vivamos Bien registró la venta de predios en la ciudad de Bogotá. El dato correspondiente a la cantidad de inmuebles vendidos cada año se registra en la siguiente tabla.

El gerente de la inmobiliaria, con el fin de analizar el comportamiento de sus ventas, busca una estrategia para representar los datos de forma gráfica y facilitar su posterior análisis.

AÑO	Frecuencia absoluta n_i	Frecuencia relativa f_i	Frecuencia absoluta acumulada N_i
2015	320	0.128	320
2016	400	0.16	720
2017	615	0.246	1,335
2018	540	0.216	1,875
2019	345	0.138	2,220
2020	280	0.112	2,500
	$n = 2,500$	SUMA = 1	

Ahora, para representar tales datos, es posible que uses diversos tipos de gráficos.

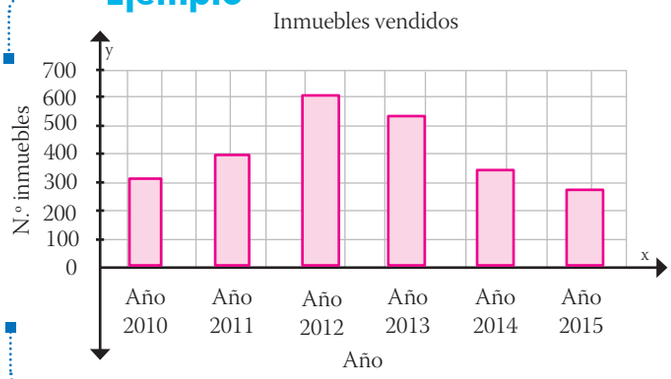
Diagrama de barras

Un **diagrama de barras** es una representación gráfica que permite mostrar un conjunto de datos o valores mediante barras rectangulares que tienen una longitud proporcional a la frecuencia absoluta de los datos recolectados.

Desempeño: Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 27 04/09/2023 13:22:26

Ejemplo



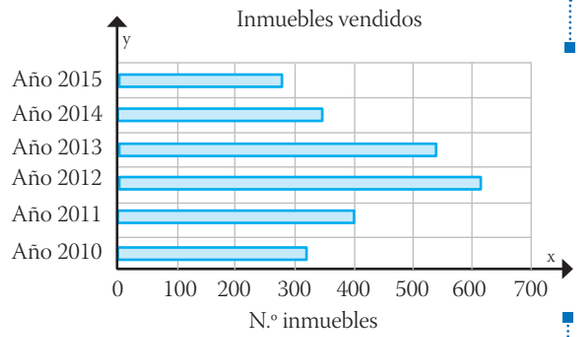


Diagrama de líneas

Los **diagramas de líneas** se usan para representar cambios de determinada variable con respecto al tiempo. En este tipo de diagrama los datos se representan por puntos que se unen mediante segmentos de recta.

Ejemplo

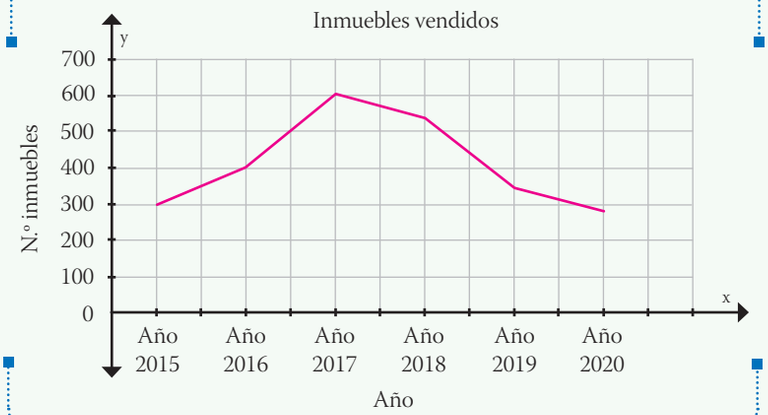


Diagrama circular

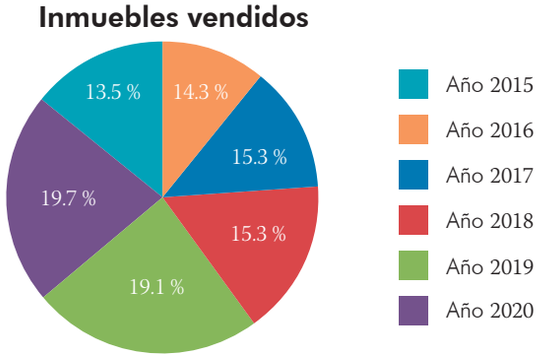
Un **diagrama circular** permite representar datos haciendo uso de una circunferencia dividida en tantas partes como datos contenga. El área de cada sector circular que corresponde a cada parte varía de acuerdo con su frecuencia. La fracción del círculo que corresponde a cada dato es proporcional a la frecuencia relativa de este dato, y el ángulo que le corresponde se puede calcular con una regla de tres.

Ejemplo

Año	Porcentaje
2020	$6{,}625 \quad 100\,\%$ $1{,}300 \quad x \qquad x = \dfrac{1{,}300 \times 100}{6{,}625} = 19.62$

Amplitud
$2015 = \dfrac{890 \times 360^{\circ}}{6{,}625}$ $2015 = 48.4^{\circ}$

Con estos ángulos construyes el diagrama circular que está a continuación.



Interpreta información presentada en tablas de frecuencia y gráficos cuyos datos están agrupados en intervalos y decide cuál es la medida de tendencia central que mejor representa el comportamiento de dicho conjunto

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 28 04/09/2023 13:22:27

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Indica qué diagrama utilizarías para representar cada una de las siguientes situaciones y justifica tu elección:

a. La temperatura registrada en una ciudad durante una semana.

b. El número de hijos de 10 familias.

c. El consumo de energía de una familia en un mes.

d. El tiempo dedicado por un estudiante a sus actividades extracurriculares.

2. ¿Por qué en un diagrama de barras los valores del eje vertical deben tener la misma distancia entre ellos? Justifica tu respuesta.

3. Al construir un diagrama circular, ¿a qué frecuencia debe ser proporcional el número de grados de cada sector?

Solución de problemas

4. Se pregunta a 7 niños de una escuela de arte cuánto dinero les dan sus padres semanalmente para la compra de materiales. Las respuestas se muestran a continuación:

Estudiante	Dinero
Emilio	Q 35.00
Alejandra	Q 60.00
María	Q 50.00
Andrea	Q 35.00
Joaquín	Q 25.00
Camilo	Q 60.00
Adriana	Q 35.00

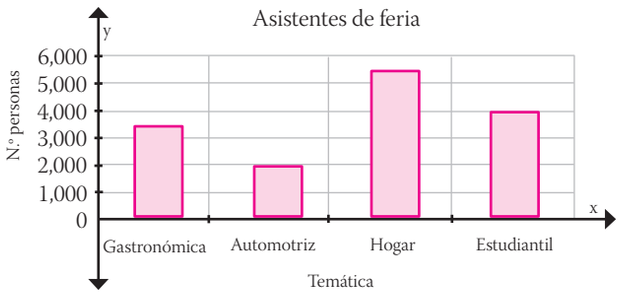
Representa los datos en un diagrama de barras y responde:

a. Si los papás deciden triplicar el dinero dado a sus hijos una semana, ¿cuál sería la nueva tabla de frecuencias?

b. ¿Qué pasaría con el nuevo diagrama de barras? ¿Encuentras alguna relación entre estos?

c. ¿Es posible representar los datos en un diagrama de líneas? Justifica tu respuesta.

5. Observa el diagrama de barras y escribe F o V:



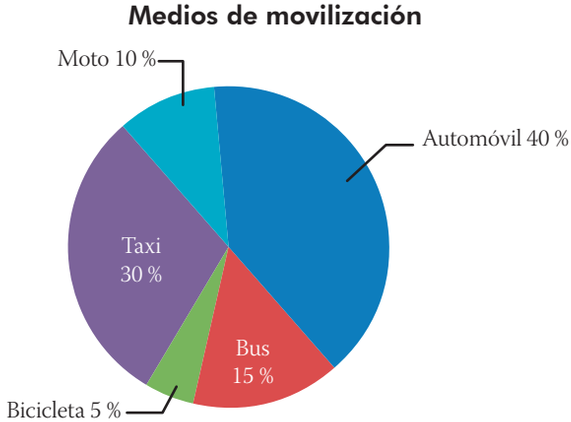
a. Aproximadamente 5,500 personas asistieron a la feria de hogar. ☐

b. A la feria estudiantil asistieron el doble de personas que a la feria automotriz. ☐

c. En total, asistieron el triple de personas de las que asistieron a la feria del hogar. ☐

d. Hay personas que asistieron a la feria gastronómica y estudiantil. ☐

6. Se realizó una encuesta a 100 estudiantes de un colegio sobre el tipo de transporte que usan para ir de su casa al colegio. Con los resultados que se muestran en el siguiente diagrama circular, realiza la tabla de frecuencias.



Desempeño: Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 29 04/09/2023 13:22:28

Componente: Aleatorio

Medidas de tendencia central para datos agrupados y no agrupados

Aprendo

Media

Para hallar la **media aritmética** en datos agrupados debes:

1. Calcular las marcas de clase de cada intervalo.
2. Multiplicar las marcas de clase por la frecuencia absoluta de cada una.

Ejemplo

El equipo de desarrollo humano de la inmobiliaria Vivamos Bien, consciente de la importancia de realizar pausas activas con sus empleados, está elaborando un plan de actividades para sus 20 trabajadores. Para tal tarea, realizan una encuesta en la que preguntan las edades con el fin de implementar actividades pertinentes a sus intereses. La siguiente es la información relacionada con las edades de los empleados.

Los datos del problema se pueden agrupar en la siguiente tabla:

Edad (años)	Marca de clase x_i	Frecuencia absoluta n_i	Frecuencia absoluta acumulada N_i	Marca de clase × Frecuencia $x_i \times n_i$
[23 , 28)	25.5	2	2	51
[28 , 33)	30.5	5	7	152.5
[33 , 38)	35.5	5	12	177.5
[38 , 43)	40.5	8	20	324
		Suma = 20		Suma = 705

$$\bar{x} = \frac{\text{suma (marca de clase} \times \text{frecuencia absoluta)}}{\text{total de datos}}$$

$$\bar{x} = \frac{705}{20}$$

$$\bar{x} = 35.25$$

Mediana

La **mediana** (M_e) es el dato central de la muestra. Se encuentra en el intervalo que contiene la frecuencia acumulada correspondiente al cociente de la frecuencia absoluta entre dos.

Para obtener la mediana, debes saber que existen 2 pasos:

Primer paso

Cuando $\frac{n}{2}$ coincide con la frecuencia acumulada de cierto intervalo, la mediana corresponde al extremo superior del intervalo.

Segundo paso

Cuando $\frac{n}{2}$ se encuentra entre dos frecuencias acumuladas, entonces la mediana se situará en algún lugar en el intervalo superior.

En tal caso, se desarrolla la siguiente ecuación: $M_e = l_i + \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} \times a_i$

Interpreta información presentada en tablas de frecuencia y gráficos cuyos datos están agrupados en intervalos y decide cuál es la medida de tendencia central que mejor representa el comportamiento de dicho conjunto.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 30 04/09/2023 13:22:29

Donde:

l_i = límite inferior de la clase en donde se encuentra la mediana.
N_i = frecuencia absoluta acumulada de la clase en donde se encuentra la mediana.
n_{i-1} = frecuencia absoluta anterior a la clase en donde se encuentra la mediana.
n = cantidad de datos.
a_i = amplitud de la clase.

Ejemplo

En lo que refiere a nuestro ejemplo, debemos seguir el segundo caso, pues $\frac{n}{2}=10$ se encuentra entre dos frecuencias acumuladas, por lo que la mediana se situará en algún lugar del intervalo [33, 38).

Edad (años)	Frecuencia absoluta n_i	Frecuencia absoluta acumulada N_i
[23 - 28)	2	2
[28 - 33)	5	7
[33 - 38)	5	12
[38 - 43)	8	20
	Suma= 20	

$$M_e = 33 + \frac{\frac{20}{2} - 7}{5} \times 5$$
$$M_e = 33 + 0.6 \times 5$$
$$M_e = 33 + 3$$
$$M_e = 36$$

En tal caso, la mediana que corresponde a la edad de los 20 trabajadores encuestados es 36.

Moda

La **moda** (M_O) se calcula en la clase modal, que es la clase con mayor cantidad de datos. Para calcular la moda, se emplea la siguiente fórmula:

$$M_o = l_i + \frac{n_i - n_{i-1}}{(n_i - n_{i-1}) + (n_i - n_{i+1})} \times a_i$$

Donde:

l_i = límite inferior de la clase modal.
n_i = frecuencia absoluta de la clase modal.
n_{i-1} = frecuencia absoluta anterior a la clase modal.
n_{i+1} = frecuencia absoluta siguiente a la clase modal.
a_i = amplitud de la clase.

Ejemplo

$$M_o = 38 + \frac{8-5}{(8-5) + (8-0)} \times 5$$
$$M_o = 38 + 0.27 \times 5$$
$$M_o = 38 + 1.36$$
$$M_o = 39.36$$

Es decir, la moda correspondiente a la edad de los trabajadores se encuentra en el último intervalo y corresponde a 39.36.

Desempeño: Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 31 04/09/2023 13:22:32

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Usando la siguiente tabla de frecuencias, contesta:

Datos	Frecuencia absoluta n_i
[4 - 7.5)	5
[7.5 - 11)	1
[11 - 14.5)	6

a. Halla la media.

b. ¿A qué situaciones consideras ques es posible aplicar tal conjunto de datos?

c. Menciona dos situaciones y argumenta el porqué de tu elección.

2. Los siguientes datos corresponden a la cantidad de animales que se tienen en diferentes zoológicos de una ciudad:

14	11	15	17
16	20	10	12

a. Halla la mediana de estos datos.

b. ¿Cuántos animales hay en total en los zoológicos?

3. Los siguientes son los ingresos de los seis últimos meses de un trabajador:

Q2, 555.00	Q3, 067.00	Q2,044.00
Q2,470.00	Q2, 726.00	Q2, 896.00

a. ¿Cuál es el promedio de ingresos del trabajador?

b. ¿Cuánto ganó en total?

c. Halla la mediana de los ingresos.

d. Si el trabajador quiere tener en cuenta un mes más, ¿qué ocurre con la mediana?, ¿cambia?, ¿sigue igual?

e. ¿Es verdad que el trabajador gana un valor superior al promedio durante 3 meses?

4. En la construcción de un edificio, al llegar al piso 7, los trabajadores se dan cuenta de que se acabó el cemento y deben ir a comprar más, pero no saben cuánto. Hacen una lista con la cantidad de cemento usado en los pisos anteriores.

Pisos	Cantidad (kg)
1	397
2	400
3	370
4	412
5	387
6	401

a. Halla el promedio de la cantidad de cemento que se gasta por piso.

b. ¿Cuánto cemento han usado en total?

c. ¿En qué piso se usó más cemento?

Solución de problemas

5. Lanza un dado 8 veces y completa la tabla con los resultados que obtengas.

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8
Resultado								

a. ¿Cuál es la moda de los resultados obtenidos?

6. Las edades de los integrantes de un grupo de baile son las siguientes:

18	22	15	20	23	26	19	17	21	22
28	27	25	18	20	22	25	24	29	16

a. ¿Cuántos son los integrantes del grupo?

b. Halla la media de las edades

c. ¿Cuántos intervalos se deben determinar para construir la tabla de frecuencias?

d. ¿Cuál es la amplitud de los intervalos?

e. Registra las edades en una tabla de frecuencias.

7. En la siguiente tabla se registra la estatura en metros (m) de 20 personas:

1.50	1.68	1.69	1.62	1.75	1.64	1.57	1.52	1.70	1.67
1.58	1.65	1.75	1.55	1.72	1.70	1.75	1.79	1.65	1.59

a. Halla la mediana de las estaturas.

Interpreta información presentada en tablas de frecuencia y gráficos cuyos datos están agrupados en intervalos y decide cuál es la medida de tendencia central que mejor representa el comportamiento de dicho conjunto.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 32 04/09/2023 13:22:32

Escases y abundancia de recursos

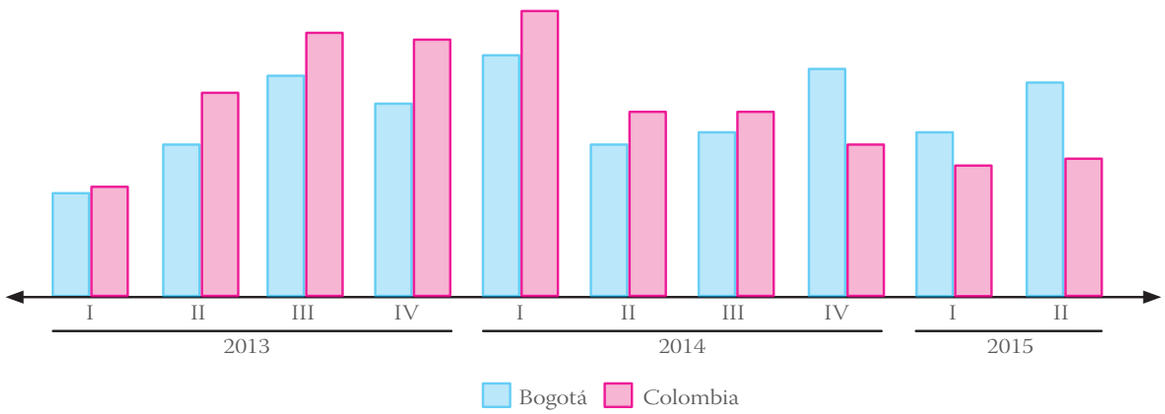
Aprendo

Bienes escasos: no están disponibles libremente y son los que generalmente se adquieren en el mercado.

Ejemplos: el petróleo, el agua potable, etc.

Bienes libres o abundantes: si bien son necesarios para satisfacer necesidades, los mismos están disponibles libremente en la naturaleza o al alcance de todos y no poseen dueño ni precio. Algunos ejemplos son la luz solar, el aire, etc.

PIB TRIMESTRAL DE BOGOTÁ Y DE COLOMBIA, VARIACIÓN % ANUAL DEL TRIMESTRE



Exploro el tema

Después de la desaceleración en el primer trimestre del año 2015, la economía de Bogotá· repuntó en el segundo trimestre alcanzando un crecimiento de 4.6 %, superior en 1.6 puntos porcentuales al de la economía colombiana.

Así mismo, es de destacar que la economía de la ciudad creció por encima de la economía colombiana por tercer trimestre consecutivo; también que durante todo 2013 y los primeros tres trimestres de 2014, su crecimiento se encontrara por debajo del de la nación.

Practico y aplico

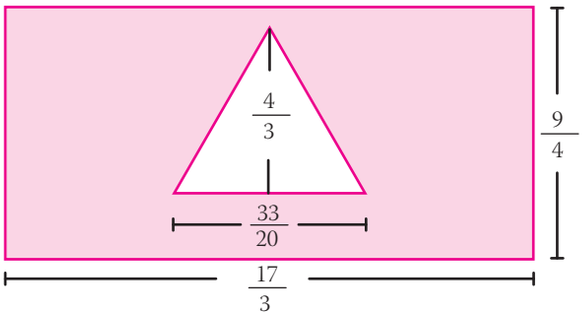
1. Investiga los índices de la economía en los 4 últimos años en Guatemala.
2. Analiza las causas de crecimiento o decrecimiento de los índices de la economía en los últimos 4 años en Guatemala.
3. Presenta a tu familia un análisis de cómo se encuentra su economía de acuerdo a los sectores económicos y la escasez de recursos (utiliza los gráficos que mas te convenga usar).

Desempeño: Ilustra la importancia de los sectores económicos y su relación con la abundancia y escasez de bienes y servicios en su municipio.

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 33 04/09/2023 13:22:33

Evaluación tipo Saber

Contesta las preguntas de acuerdo con la siguiente gráfica que corresponde a una pared rectangular en donde se ha ubicado un cuadro triangular.



La forma para determinar el área de la parte no sombreada se obtiene

A. multiplicando el valor de la base por la altura.

B. determinando el valor del área del triángulo.

C. determinando el valor del área del cuadrado y restándole el valor del área del triángulo.

D. determinando el valor del área del triángulo y restándole el valor del área del rectángulo.

1. El área de la región sombreada es

A. $\frac{8}{5}$ **B.** $\frac{233}{20}$ **C.** $\frac{287}{25}$ **D.** $\frac{51}{4}$

Los niños de una fiesta fueron invitados a comer. En la comida, entre otros alimentos, había sopa, pasta, arroz, pollo y postre. La siguiente tabla muestra la cantidad de carbohidratos que contiene una porción de tres de estos alimentos:

Alimento	Cantidad de carbohidratos por porción
Sopa	52.50 gramos
Arroz	52.6 gramos
Pasta	52.05 gramos

2. Si ordenas los alimentos de mayor a menor cantidad de carbohidratos contenidos, el orden es

A. pasta - sopa - arroz.

B. sopa - pasta - arroz.

C. sopa - arroz - pasta.

D. arroz - sopa - pasta.

3. Si la comida de cada niño contiene una porción de cada uno de los tres alimentos, ¿cuántos carbohidratos consume cada niño?

A. 15.71 gramos **C.** 156.61 gramos

B. 156.115 gramos **D.** 157.15 gramos

4. Si un niño consume tres porciones de cada uno de los tres alimentos, ¿cuántos carbohidratos consume?

A. 461.45 gramos.

B. 371.15 gramos.

C. 471.45 gramos.

D. 371.45 gramos.

5. Considera las siguientes afirmaciones:

I. Todo número par es racional.

II. El conjunto de los irracionales es infinito.

Es correcto afirmar que

A. las dos son falsas.

B. las dos son verdaderas.

C. solamente la I es verdadera.

D. solamente la II es verdadera.

7. Un par de números racionales que satisfacen la desigualdad $\frac{-1}{3} < x < \frac{1}{2}$ son

A. $\frac{-1}{4}$ y $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{-3}{4}$ y $\frac{1}{2}$

B. $\frac{-1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{-1}{3}$ y $\frac{3}{5}$

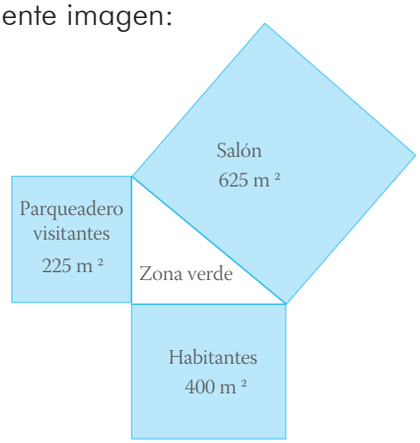
L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 34 04/09/2023 13:22:34

8. Si se construye una caja, con la condición de que el material desperdiciado no exceda 100 cm^2, el valor del lado de cada cuadrado que se quita en cada esquina es:

A. 100.1 cm.
C. 10.1 cm.
B. 5.1 cm.
D. 25.1 cm.

Responde las preguntas 9 y 10 de acuerdo con la siguiente información:

Un conjunto residencial tiene un salón de juegos, zona de parqueadero de visitantes y zona de parqueadero de habitantes, cada uno con forma cuadrada, y una zona verde con forma de triángulo rectángulo, como muestra la siguiente imagen:



9. Asumiendo que la representación anterior está a una escala donde 1 m lineal está representado por $\frac{1}{5}$, podemos afirmar, con respecto al triángulo que representa la zona verde, que

A. su perímetro es de $\frac{1}{500}$ del perímetro real de la zona verde.

B. sus lados miden 15 m, 20 m y 25 m respectivamente.

C. su perímetro es la quinta parte del perímetro real del triángulo de la zona verde.

D. sus lados no guardan proporcionalidad respecto a los lados del triángulo real de la zona verde.

10. El ingeniero tiene calculado que, en cada zona de parqueadero, debe construir igual cantidad de parqueaderos por piso. Si cada zona de parqueaderos tiene dos pisos y 10 parqueaderos en cada uno, es falso afirmar que

A. los parqueaderos de mayor área son los de visitantes.

B. rn cada piso de cualquiera de las zonas de parqueaderos hay 5 parqueaderos.

C. cada parqueadero de la zona de parqueo de habitantes tiene un área de 80 m^2.

D. todos los parqueaderos tienen áreas superiores a 50 $m.^2$

Las preguntas 11, 12 y 13 se contestan con la siguiente información. En la siguiente tabla se registran las edades de los 16 integrantres de una escuela de danzas:

Edades	Frecuencia
[4 - 8.75)	3
[8.75 - 12.5)	6
[12.5 - 16.25)	4
[16.25 - 20)	3

11. ¿Cual es la media?

A. 12.5
C. 8.75
B. 12.26
D. 16.25

12. ¿Cual es la mediana?

A. 11.875
C. 12.25
B. 6
D. 10.625

13. ¿Cual es la moda?

A. 6
C. 16
B. 11
D. 12

L8_Unidad_1_2021 Indiv.indd 35 04/09/2023 13:22:34

Unidad 2

Factorización, circunferencia y tendencia no central

¿Qué aprenderé?

- Factorización
- Circunferencia
- Medidas de tendencia no central

¿Qué lograré?

- ✔ Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
- ✔ Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.
- ✔ Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón).



Productos notables

Aprendo

Los productos notables son productos entre polinomios que tienen ciertas características que permiten establecer reglas para calcularlos sin tener que recurrir a realizar la multiplicación de polinomios.

El cuadrado de un binomio $(a+b)^2$ o $(a-b)^2$ es equivalente a:

- El cuadrado del primer término: a^2
- El signo más (+) o menos (-), según la operación indicada en el binomio.
- Dos veces el primer término por el segundo: $2ab$
- Más el cuadrado del segundo término: $+b^2$

Ejemplos

- $(x+1)^2 = x\cdot x+1\cdot x+1\cdot x+1\cdot 1 = x^2+2(1\cdot x)+1 = x^2+2x+1$
- $(x+3)^2 = x\cdot x+3\cdot x+3\cdot x+3\cdot 3 = x^2+2(3\cdot x)+9 = x^2+6x+9$
- $(2x+y)^2 = 2x\cdot 2x+2x\cdot y+2x\cdot y+y\cdot y = 4x^2+2(2x\cdot y)+y^2 = 4x^2+4xy+y^2$
- $(3x+2y)^2 = 3x\cdot 3x+3x\cdot 2y+3x\cdot 2y+2y\cdot 2y = 9x^2+2(3x\cdot 2y)+4y^2 = 9x^2+12xy+4y^2$
- $(x+y)^2 = x\cdot x+x\cdot y+x\cdot y+y\cdot y = x^2+2(x\cdot y)+y^2 = x^2+2xy+y^2$

Producto de binomios conjugados

El **producto de la suma por la diferencia de dos términos** $(a+b)(a-b)$ es equivalente a un binomio que se forma así:

- El cuadrado del primer término: a^2
- El signo menos: $-$
- El cuadrado del segundo término: b^2

Es decir: $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Ejemplo

Realiza la expansión de la suma por la diferencia $(2x+5)(2x-5)$

- El cuadrado del primer término: $(2x)^2$
- El signo menos: $-$
- El cuadrado del segundo término: 5^2

Es decir: $(2x+5)(2x-5) = (2x)^2-5^2$

Resolviendo las operaciones indicadas: $(2x+5)(2x-5) = 4x^2-25$

Desempeño: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 37 04/09/2023 11:56:31

Producto de dos binomios que tienen un término común

Producto de la forma $(x+a)(x+b)$ es equivalente al trinomio que se forma así:

- El cuadrado del término común: x^2
- Más el producto del término común por la suma de los términos no comunes: $+x(a+b)$
- Más el producto de los términos no comunes: $+ab$

Es decir: $(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$

Ejemplo

Expande $(y-8)(y-12)$ utilizando productos notables

- El cuadrado del término común: y^2
- Más el producto del término común por la suma de los términos no comunes: $+y(-8+(-12))=+(-20)y=-20y$
- Más el producto de los términos no comunes: $+(-8)(-12)=+(+96)=+96$

Es decir: $(y-8)(y-12)=y^2-20y+96$

Cubo de la suma o la diferencia de un binomio

Cubo de un binomio $(a+b)^3$ es equivalente al polinomio que se forma así:

- El cubo del primer término: a^3
- El signo más + o menos –, según la operación indicada en el binomio.
- El triple del cuadrado del primer término por el segundo término: $3a^2b$
- Más el triple del primer término por el cuadrado del segundo término: $+3\ a\ b^2$
- El signo más + o menos –, según la operación indicada en el binomio
- El cubo del segundo término: b^3

Es decir:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Ejemplo

Determina el coeficiente de x^4 en la expansión de $(4x^2-3)^3$.

Solución

Al expandir el cubo del binomio, obtienes como resultado un polinomio, observa:

$(4x^2-3)^3=(4x^2)^3-3\times(4x^2)^2\times 3+3\times(4x^2)\times 3^2-3^3$

$=4^3(x^2)^3-3\times 4^2(x^2)^2\times 3+3\times 4x^2\times 3^2-3^3$

$=64x^6-144x^4+108x^2-27$

Por lo tanto, el coeficiente de x^4 es -144

DBA: Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 38 04/09/2023 11:56:32

Componente: Numérico-variacional

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Escribe el término o los términos que faltan en cada expresión:

a. $(x \square 2)^3 = x^3 + 6x^2 + \ ? \ + 8$

b. $(x^3 + 4y)\square = x^6 + 8x^3 + 16y^2$

c. $(x+9)(x-9) = x^2 \ \square \ \ 81$

d. $(x \ \square \ 5)^3 = x^3 - 15x^2 + 75x - \square$

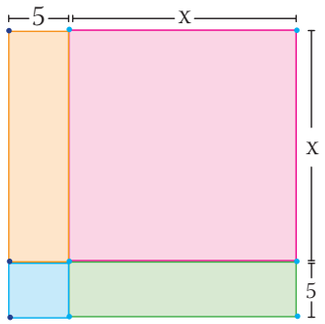
e. $(m+4)(m-12) = m^2 - 8m - \square$

f. $(x^4 \ \square \ 5w)^2 = x^8 - 10x^4w + 25w^2$

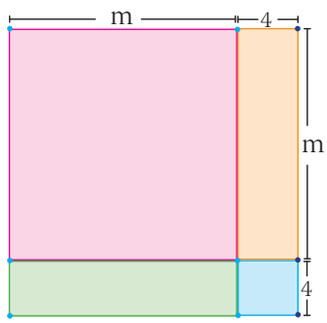
Razonamiento

2. Encuentra el área de las regiones que forman cada figura.

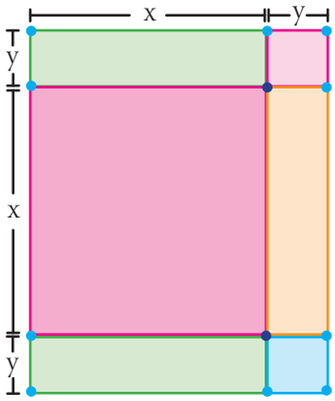
A



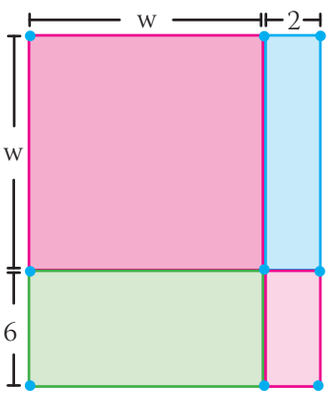
B



C



D



3. Identifica cuál formula de producto notable se puede utilizar en cada caso, luego realiza la expansión de cada expresión algebraica, teniendo en cuenta que en algunos casos debes utilizar más de un producto notable:

a. $(w+2y)^3$

b. $(a-5b)(a+5b)$

c. $(y-6)^3$

d. $((x+1)-y)((x+1)+y)$

e. $((x-2)+3)((x-2)+7)$

4. Escribe Falso (F) o verdadero (V) según corresponda, justifica tu respuesta:

a. $(5x+3y)(3y-5x)$ no se puede resolver utilizando productos notables. ☐

b. Al resolver $(a+b)^2$ se obtiene un trinomio. ☐

c. Al resolver $(a+b)(a-b)$ se obtiene un trinomio. ☐

d. Al expandir el cubo de un binomio todos los términos siempre son positivos. ☐

e. $(3x+2y)^2 = 3x^2 + 12xy + 2y^2$ ☐

f. $(x^3+2)(x^3-5) = x^2 - 3x - 10$ ☐

g. $\left(\frac{2}{5}x - y\right)\left(\frac{2}{5}x + y\right)$ no se puede expandir ☐

5. Expande los siguientes productos notables.

a. $(m+31)(m-1)$

b. $(3p^3 - q^2)^3$

c. $(r^5 + 4s)^2$

d. $(4g + h)^3$

e. $(t-5)(t+12)$

f. $(4y^4 + z^3)^2$

g. $(g-5)(g-7)$

h. $(q+7)(q+10)$

i. $(2b-3c)^3$

j. $(2b-3c)^2$

k. $(7xy^2 - wz^3)^2$

l. $(3a^2 - 4b^3)(3a^2 + 4b^3)$

Desempeño: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 39 04/09/2023 11:56:33

Factor común

Aprendo

El **factor común** se emplea para factorizar una expresión en la cual todos los términos tienen algo en común.

Para hallar el factor común de un polinomio, debes hacer lo siguiente:

1. Halla el m.c.d. de los coeficientes.

2. De la parte literal, busca aquellas letras que están en todos los términos del polinomio y los tomas con su menor exponente.

3. Escribe el factor común y dentro de un paréntesis ubicas el cociente de dividir cada término del polinomio entre el factor común.

Ejemplo

Factoriza el polinomio $x^3-3x^6y^2+8x^4y^3$

Paso 1: Halla el m.c.d. de los coeficientes: $m.c.d.(1,3,8)=1$

Paso 2: De las letras, toma la x, que es la que está en todos los términos del polinomio, y utilízala con su menor exponente que en este caso es x^3

Paso 3: El factor común es x^3. Dentro de un paréntesis ubica el cociente que queda de dividir cada término del polinomio entre el factor común.

$$\frac{x^3}{x^3}=1 \qquad \frac{-3x^6y^2}{x^3}=-3x^3y^2 \qquad \frac{+8x^4y^3}{x^3}=+8xy^3$$

La factorización es: $x^3\left(1-3x^3y^2+8xy^3\right)$

El **factor común por agrupación de términos** se aplica en casos en los que no todos los términos tienen factor común, pero sí lo tienen al formar grupos de términos. Para realizar esta factorización sigue los pasos:

1. Agrupas los términos de tal manera que cada paréntesis tenga la misma cantidad de términos y que en cada uno exista un factor común.

2. Extrae el factor común de cada paréntesis.

3. Después de sacar el factor común de cada grupo, las expresiones al interior del paréntesis deben ser iguales, si no es así, debes agrupar de otra manera desde el inicio.

4. Vuelve a factorizar la expresión resultante utilizando factor común.

DBA: Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 40 04/09/2023 11:56:33

Componente: Numérico-variacional

Ejemplo

Factoriza completamente el polinomio $x^3+2x^2-3x+x^2y+2xy-3y$

$(x^3+2x^2-3x)+(x^2y+2xy-3y)$ Agrupando términos.

$x(x^2+2x-3)+y(x^2+2x-3)$ Factorizando los factores comunes.

$(x^2+2x-3)(x+y)$ Factoriza (x^2+2x-3) en cada término.

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Halla el factor común.

a. $-2x^3+16x$

b. $2x^5-6x^4-10x^3$

c. $m(m-3)+5(m-3)$

d. $2(z-3)-x(3-z)$

e. $2xy^2-6x^2y+3xy$

2. Halla el factor común por agrupación de términos.

a. x^3+4x^2+x+4

b. $6x+3-2x^3-x^2$

c. $-16w^3-4w^2+4w+1$

d. $3x^3-x^2+6x-2$

e. $x^2yz-xz^2y+x^2p-yzp$

3. Factoriza cada polinomio.

a. $6m-9n+21nx-14mx$

b. $nx^2-5a^2y^2-n^2y^2+5a^2x$

c. $(x+1)(x-2)+3x(x-2)$

d. $14x^2y^2-28x^3+56x^4$

e. $35m^2n-70m^5$

4. Factoriza completamente cada polinomio.

a. $2x^3y+3x^2y-2xy$

b. $x^2z^3-7xz^3+12z^3$

c. $x^2y+5xy+6y$

d. $x^2y+5xy+6y$

e. $a^3-2a^2b+ab^2+a^2c-2abc+b^2c$

Razonamiento

5. Explica cuál fue el error en el procedimiento y corrígelo.

Factorización del polinomio $4ax-4x+5y-5ay$

$(4ax-4x)+(5y-5ay)$ Agrupa términos.

$4x(a-1)+5y(1-a)$ Halla factores comunes.

$(a-1)(4x+5y)$ Factoriza $(a-1)$ en cada término.

6. Escribe Falso (F) o Verdadero (V) según corresponda. Justifica tu respuesta.

a. El factor común de la expresión $10a^2b-5ab+15a^3b$ es ab ☐

b. El polinomio $2a+4b+6c+8d$ no tiene factor común ☐

c. El polinomio $3x^3+12x^2+6x$ no tiene factor común ☐

d. El factor común de $15x^2+25x+35$ es 5 ☐

e. La expresión $6ax+3a+1+2x$ solo se puede factorizar por factor común por agrupación de términos ☐

f. El polinomio x^3+6x^2+9x se expresa como multiplicación de tres factores ☐

Desempeño: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

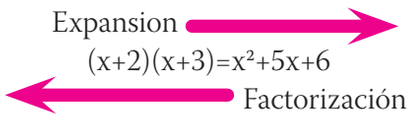
L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 41 04/09/2023 11:56:34

Trinomios y triángulo de Pascal

Aprendo

Trinomio cuadrado perfecto

Factorizar una expresión algebraica consiste en escribirla como producto de otras más sencillas. De tal manera que la factorización aparece como un proceso inverso a la expansión.



En particular, cuando se trata de un **trinomio** se debe verificar si es un trinomio cuadrado perfecto, para así aplicar ese tipo de factorización.

El **trinomio cuadrado perfecto** es el trinomio que resulta de elevar un binomio al cuadrado, por lo cual cumple con las siguientes características:

- Al estar ordenado con relación a una variable, el primer y el tercer término tienen raíz cuadrada exacta y son positivos.
- El segundo término es igual a dos veces el producto de las raíces cuadradas y puede ser positivo o negativo.
- Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto extraes las raíces del primer y tercer término teniendo en cuenta el signo del segundo término, para ello, aplicas la siguiente fórmula:

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2 \cdot x \cdot y + y^2$$

Ejemplo

Factoriza el trinomio $x^2 + 6x + 9$

Solución: verifica que sea un trinomio cuadrado perfecto:

- El primer término tiene raíz cuadrada exacta $\sqrt{x^2} = x$ y es positivo.
- El tercer término también tiene raíz cuadrada exacta $\sqrt{9} = 3$ y es positivo.
- El segundo término es el doble de la raíz del primero por la raíz del tercero $(2)(x)(3) = 6x$

Soluciona de la siguiente manera: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Ejemplo

Factoriza $25m^2 - 10mn + n^2$

Solución: verifica que sea un trinomio cuadrado perfecto:

- El primer término es positivo y tiene raíz cuadrada exacta $\sqrt{25m^2} = 5m$.
- El tercer término es positivo y también tiene raíz cuadrada exacta $\sqrt{n^2} = n$
- El segundo término es el doble de la raíz del primero por la raíz del tercero $(2)(5m)(n) = 10mn$, es decir: $25m^2 - 10mn + n^2$

$5m$; $2 \cdot 5m \cdot n$; n

Solucionas de la siguiente manera:
$25m^2 - 10mn + n^2 = (5m - n)^2$

DBA: Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 42 04/09/2023 11:56:35

Componente: Numérico-variacional

Triángulo de Pascal y factorización completa

A continuación aparece una lista de las potencias del binomio $(a + b)$ y los coeficientes de los términos de cada potencia:

Recuerda que...

Blaise Pascal nació en 1623 en París.

En 1654 se ocupó de las propiedades del triángulo aritmético, hoy llamado de Pascal y que da los coeficientes de los desarrollos de las sucesivas potencias de un binomio. El tratamiento de dicho triángulo en términos de una geometría al azar, lo convirtió en uno de los fundadores del cálculo matemático de las probabilidades.

$(a+b)^0 \rightarrow 1$

$(a+b)^1 \rightarrow 1 \quad 1$

$(a+b)^2 \rightarrow 1 \quad 2 \quad 1$

$(a+b)^3 \rightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

$(a+b)^4 \rightarrow 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

$(a+b)^5 \rightarrow 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$

$(a+b)^6 \rightarrow 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$

$(a+b)^7 \rightarrow 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$

Los coeficientes se han organizado en forma de triángulo, llamado triángulo de Pascal. Puedes observar que los coeficientes (diferentes de 1) de cualquiera de las filas, pueden obtenerse sumando dos coeficientes de términos consecutivos de la fila inmediatamente anterior.

Las conclusiones anteriores pueden ser utilizadas para hallar los términos de las potencias de diferentes binomios. Observa los siguientes ejemplos:

Ejemplos

1. Desarrollar $(a-2b)^7$

$$(a-2b)^7 = a^7 - 7a^6(2b) + 21a^5(2b)^2 - 35a^4(2b)^3 + 35a^3(2b)^4 - 21a^2(2b)^5 + 7a(2b)^6 - (2b)^7$$

$$(a-2b)^7 = a^7 - 14a^6b + 84a^5b^2 - 280a^4b^3 + 560a^3b^4 - 672a^2b^5 + 448ab^6 - 128b^7$$

2. Hallar el tercer término de $(3x-2y)^5$

Signo:

Cuando el binomio es una resta, los signos se alternan: primer término +, segundo término −, tercer término +, ...

Exponentes:

Primer término $(3x)^5$, segundo término $(3x)^4(2y)$ tercer término $(3x)^3(2y)^2$, ...

Coeficientes:

En el triángulo de Pascal se observa que el coeficiente del tercer término es 10.

Luego, el tercer término es $10(3x)^3\,(2y)^2 = 1{,}080x^3y^2$.

Desempeño: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 43 04/09/2023 11:56:35

Trinomios

Un **trinomio** de la forma $x^2 + bx + c$ resulta del producto de los binomios $(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$
De lo anterior puedes decir que: $b = m + n, \quad c = mn$

La factorización consiste en hallar los valores de m y n, de tal manera que se pueda expresar el producto de binomios

Ejemplos

1. $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$ — x es la raíz de x^2.

$(+5) + (-3) = +2$ — Coeficiente de x.

$(+5) \cdot (-3) = -15$ — Término independiente del trinomio.

2. $x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$ — x es la raíz de x^2.

$(-4) + (-3) = -7$ — Coeficiente de x.

$(-4) \cdot (-3) = +12$ — Término independiente del trinomio.

Factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ consiste en buscar factores de la forma $(px + r)(qx + s)$, en donde $a = pq$, $b = ps + qr$ y $c = rs$
Para ello, puedes seguir dos procesos que conducen al mismo resultado.

Proceso 1

- Descompones a en dos factores p y q
- Descompones c en dos factores r y s
- Con los factores formas dos binomios y multiplicas en diagonal

$$ax^2 + bx + c$$

Factores de a ↓ ↓ Factores de c

$p \qquad r$

$q \qquad s$

Sumas los dos resultados y verificas que $ps + qr = b$, si la suma no da el valor de b, puedes intercambiar los valores de r y s y sumas nuevamente, o puedes repetir el proceso con otros factores de los números a y c.

Proceso 2

- Ordenas el trinomio para que esté en la forma $ax^2 + bx + c$
- Multiplicas y divides el trinomio por a $\dfrac{a(ax^2 + bx + c)}{a}$
- Expresas de la forma $\dfrac{a^2x^2 + b(ax) + ac}{a}$
- Factorizas el numerador utilizando dos paréntesis de la forma $(ax + p)(ax + q)$ donde $p + q = b$ y $pq = ac$, así: $\dfrac{(ax + p)(ax + q)}{a}$
- Buscas el m.c.d. entre los coeficientes al interior de cada paréntesis y simplificas el denominador.

DBA: Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos..

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 44 04/09/2023 11:56:36

Ejemplo

Factoriza el trinomio $6x^2 - x - 2$.

- El trinomio está ordenado, identificas $a = 6,\ b = -1,\ c = -2$
- Multiplicas y divides el trinomio por 6

$$\frac{6(6x^2 - x - 2)}{6}$$

- Expresa de la siguiente forma: $\dfrac{(6x)^2 - 1(6x) - 12}{6}$
- Factorizas el numerador utilizando dos paréntesis, para ello, buscas dos números que multiplicados den 12 y que sumados den -1. Los números son 3 y -4:

$$\frac{(6x + 3)(6x - 4)}{6}$$

- Sacas factor común en los paréntesis del numerador:
  - m.c.d 6, 3 =3 m.c.d 6, 4 =2

$$\frac{(6x+3)(6x-4)}{6} = \frac{3(2x+1)2(3x-2)}{6} = \frac{6\,(2x+1)(3x-2)}{6}$$

- Finalmente, simplificas el denominador.

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Efectúa los siguientes productos:

a. $(x+3)^2$
b. $(4+y)^2$
c. $(3x+2)^2$
d. $(2+3x)^2$
e. $(2x+5y)^2$
f. $(a+5b^2)^2$
g. $(x-2)^2$
h. $(3-b)^2$
i. $(3y-1)^2$
j. $(3y-1)^2$
k. $(3x-2y)^2$
l. $(x+7)\,(x-7)$
m. $(2a-3)\,(2a+3)$
n. $(3x+6y)\,(3x-6y)$

2. Analiza las siguientes expresiones, determina cuáles de ellas son trinomios cuadrados perfectos. Factoriza cuando sea posible.

a. $4 + 6x + 9x^2$
b. $2a^2 + 2b^2 + 4$
c. $9 + 6b^6 + b^{12}$
d. $x^2 + 4xy + 4y^2$
e. $4 - 4y + y^2$
f. $9x^2 - 12x + 4$
g. $1 - 2a^3 + a^6$
h. $1 + a^{10} - 2a^5$
i. $9b^2 - 30a^2b + 25a^4$
j. $m^2 - 7m - 60$
k. $y^2 + 7y - 60$

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 45 04/09/2023 11:56:36

3. Factoriza cada trinomio cuadrado perfecto:

a. $25x^2 + 10xy + y^2$

b. $14m^3 + 49m^6 + 1$

c. $w^2 + 6w + 9$

d. $b^2 - 12b + 36$

e. $16m^2 - 40mn + 25n^2$

4. Factoriza cada trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

a. $5x^2 + 11x + 2$

b. $4x^2 + 7x + 3$

c. $5 + 7b + 2b^2$

d. $7x - 5 + 6x^2$

e. $-13a + 2a^2 + 15$

5. Factoriza cada trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

a. $b^2 + 8b + 15$

b. $r^2 - 12r + 27$

c. $h^2 - 27h + 50$

d. $x^2 + 14x + 24$

e. $x^2 + 5x + 4$

6. Identifica el tipo de trinomio y luego factorízalo.

a. $25x^2 + 70x + 49$

b. $3m^2 - 7m - 20$

c. $x^2 + 4x + 3$

d. $16x^2 - 8x + 1$

e. $5x^2 + 3x - 2$

Razonamiento

7. Escribe el término que completa el trinomio cuadrado perfecto.

a. $w^4 + \quad + 2w^2$

b. $\quad - 2a^3b^2 + b^4$

c. $x^2 + 2xy +$

d. $9 - \quad + x^2$

e. $9y^2 - \qquad + 25x^4$

f. $25 - 10x +$

8. Une cada trinomio con la factorización que corresponde.

Trinomio	Factorización
a. $x^2 - 7x + 12$	I. $(x-4)(2x-3)$
b. $x^2 + 2x - 15$	II. $(x-4)(x-3)$
c. $2x^2 - 11x + 12$	III. $(x-4)^2$
d. $x^2 - 8x + 16$	IV. $(x+5)(x-3)$

9. Analiza las siguientes expresiones, determina cuáles de ellas son trinomios cuadrados perfectos. Factoriza cuando sea posible.

a. $4 + 6x + 9x2$

b. $2a^2 + 2b^2 + 4$

c. $9 + 6b^6 + b12$

d. $x^2 + 4xy + 4y^2$

e. $4 - 4y + y2$

f. $9x^2 - 12x + 4$

g. $1 - 2a^3 + a6$

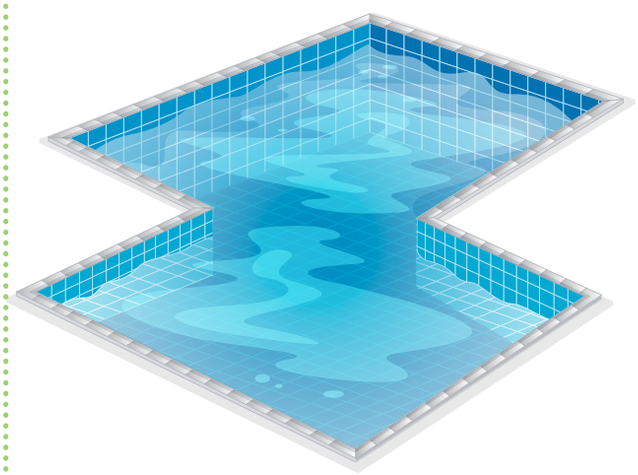
h. $1 + a^{10} - 2a5$

i. $9b^2 - 30a^2b + 25a^4$

j. $m^2 - 7m - 60$

Solución de problemas

10. Se diseña una piscina que contempla una zona para niños, como se muestra en la figura. Si el área del terreno en el cual se construirá la piscina es $A = 3x^2 + 6x - 18$ y el espacio para la zona para adultos tiene un área de $A = 2x^2 + x - 4$, responde:



a. ¿Cuál es el área que corresponde a la zona de niños?

b. ¿Cuáles son las dimensiones de la zona de niños?

DBA: Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 46 04/09/2023 11:56:38

Componente: Numérico-variacional

Diferencia de cuadrados perfectos

Aprendo

Para factorizar una diferencia de dos términos elevados al cuadrado, se indica el producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas del primer término y del segundo término. $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$ o $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$.

Ejemplo

Factoriza cada polinomio:

a. $100 - 81y^2$ **b.** $x^6y^4 - 400p^{12}$ **c.** $\frac{p^4}{q^2} - 0.09$

Solución

a. $100 - 81y^2 = (10)^2 - (9y)^2$ Escribiendo de la forma $m^2 - n^2$.

$100 - 81y^2 = (10+9y)(10-9y)$ Factorizando la diferencia de cuadrados.

b. $x^6y^4 - 400p^{12} = (x^3y^2)^2 - (20p^6)^2$ Escribiendo de la forma $m^2 - n^2$.

$x^6y^4 - 400p^{12} = (x^3y^2 - 20p^6)(x^3y^2 + 20p^6)$ Factorizando la diferencia de cuadrados.

c. $\frac{p^4}{q^2} - 0.09 = \left(\frac{p^2}{q}\right)^2 - (0.3)^2$ Escribiendo de la forma $m^2 - n^2$.

$\frac{p^4}{q^2} - 0.09 = \left(\frac{p^2}{q} + 0.3\right)\left(\frac{p^2}{q} - 0.3\right)$ Factorizando la diferencia de cuadrados.

Ejemplo

Factoriza cada polinomio:

a. $625x^8y^4 - 256$ **b.** $-175c^6z^3 + 28z^3$

Solución

a. $625x^8y^4 - 256 = (25x^4y^2)^2 - (16)^2$ Escribiendo de la forma $m^2 - n^2$

$625x^8y^4 - 256 = (25x^4y^2 + 16)(25x^4y^2 - 16)$ Factorizando la diferencia de cuadrados.

Si observas detenidamente el segundo factor, tienes sacas factor común en los paréntesis del numerador: una nueva diferencia de cuadrados de la forma $m^2 - n^2$, que puedes factorizar de la misma manera, esto es:

$625x^8y^4 - 256 = (25x^4y^2 + 16)\left[(5x^2y)^2 - (4)^2\right]$ Escribiendo de la forma $m^2 - n^2$

$625x^8y^4 - 256 = (25x^4y^2 + 16)(5x^2y + 4)(5x^2y - 4)$ Factorizando la diferencia de cuadrados.

En conclusión, puedes aplicar la factorización cuantas veces sea necesario o las que el ejercicio lo permita.

b. $-175c^6z^3 + 28z^3 = 28z^3 - 175c^6z^3$ Ordenando el binomio.

Desempeño: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 47 04/09/2023 11:56:39

$-175c^6z^3 + 28z^3 = 7z^3(4 - 25c^6)$ Aplicando factor común monomio.

$-175c^6z^3 + 28z^3 = 7z^3\left[(2)^2 - (5c^3)^2\right]$ Escribiendo de la forma $m^2 - n^2$.

$-175c^6z^3 + 28z^3 = 7z^3(2 + 5c^3)(2 - 5c^3)$ Factorizando la diferencia de cuadrados.

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Completar la tabla.

Expresión	Raíz cuadrada
$25p^4z^8$	
$81a^2b^2$	
	$11xy^4z^3$
	$\frac{3}{2}m^{14}n^6$
$0.25c^{-8}$	
$\frac{4}{25}m^{22}$	
	$(a+b)^3$
	$(p-q)^{6n}$

2. Ordena y escribe como una diferencia de cuadrados.

a. $-36 + z^2$

b. $-100 + q^8$

c. $-0.04c^8 + a^2b^2$

d. $-400m^4n^{10} + 9$

e. $-\frac{144}{121}a^{12} + 81b^{-8}$

f. $-289w^4 + 529y^{-14}$

Razonamiento

3. Factoriza cada polinomio.

a. $x^2 - 64$

b. $9m^2 - 256$

c. $w^2 - \frac{1}{100}$

d. $y^2 - 100$

e. $m^2 - 169$

f. $-49 + z^2$

g. $p^2 - 0.0001$

4. Factoriza aplicando primero factor común y, después, diferencia de cuadrados perfectos.

a. $5x^4 - 80$

b. $a^3x^4 - a^3y^2$

c. $16p^2q^6 - 4r^{10}$

d. $312a^6 - 702b^{12}$

e. $\frac{9}{40}x^6 - \frac{1}{10}y^8$

f. $-36a^2w^5 + 25b^{10}w^5$

g. $383{,}292x - 70{,}000xy^2$

Solución de problemas

5. En una clase de Matemáticas, el profesor solicita a Jairo, Sara y Samuel que escriban el resultado de la factorización de una expresión. En la siguiente tabla se muestran sus respuestas:

Jairo	$-225 + 196z^4 = (14z^2 + 15)(14z^2 + 15)$
Sara	$-225 + 196z^4 = (14z^2 - 15)(14z^2 + 15)$
Samuel	$-225 + 196z^4 = (14z^2 - 15)(14z^2 - 15)$

¿Cuál de las tres es la correcta? Explica tu decisión.

DBA: Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 48 04/09/2023 11:56:44

Componente: Numérico-variacional

Cubo perfecto de binomios

Aprendo

Al elevar un binomio (suma o diferencia) al cubo se obtiene un polinomio de cuatro términos con una forma o escritura explícita. Estos son positivos si se trata de una suma, o se alternan empezando con positivo si se trata de una diferencia.

$(m+n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$ y $(m-n)^3 = m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$

Lo anterior se puede resumir en la expresión: $(m \pm n)^3 = m^3 \pm 3m^2n + 3mn^2 \pm n^3$

Ejemplo

Comprobar si el siguiente polinomio es factorizable:

$27x^6y^3 - 54x^4y^2z^3 + 36x^2yz^6 - 8z^9$

Ideas clave

- $(m-n)^3$ **NO** es equivalente a $m^3 - n^3$
- $(m+n)^3$ **NO** es equivalente a $m^3 + n^3$

Solución

- $\sqrt[3]{27x^6y^3} = 3x^2y$, porque $(3x^2y)^3 = 27x^6y^3$
- $\sqrt[3]{8z^9} = 2z^3$, porque $\left(2z^3\right)^3 = 8z^9$
- $3(3x^2y)^2(2z^3) = 3(9x^4y^2)(2z^3) = 54x^4y^2z^3$, corresponde al segundo término del polinomio.
- $3(3x^2y)(2z^3)^2 = 3(3x^2y)(4z^6) = 36x^2yz^6$, corresponde al tercer término del polinomio.

Los signos se alternan comenzando por positivos y terminando por negativo.

Por lo tanto, el polinomio sí es factorizable y puede ser escrito como un binomio al cubo de la forma $(3x^2y - 2z^3)^3$.

Ejemplo

Determina la información faltante para que la igualdad corresponda a una factorización de binomio al cubo.

$(__ + 7a^3b^4)^3 = 8x^6y^3 + _____ + 294a^6b^4x^2y + _____$

Solución

Debido a que el binomio tiene la forma $(m+n)^3$, por comparación puedes determinar los elementos fundamentales así:

a. $m^3 = 8x^6y^3 \Rightarrow \left(m\right)^3 = \left(2x^2y\right)^3$ entonces $m = 2x^2y$

b. $n = 7a^3b^4 \Rightarrow \left(n\right)^3 = \left(7a^3b^4\right)^3$ entonces $n^3 = 343a^9b^{12}$

c. $3m^2n = 3(2x^2y)^2(7a^3b^4)$ entonces $3m^2n = 84a^3b^4x^4y^2$

Lo obtenido en los literales a, b, y c corresponde a las expresiones o términos que ocupan el primer, segundo y tercer espacios para completar respectivamente, por lo tanto, la igualdad tomaría la forma:

$$(2x^2y + 7a^3b^4)^3 = 8x^6y^3 + 84a^3b^4x^4y^2 + 294a^6b^4x^2y + 343a^9b^{12}$$

Desempeño: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 49 04/09/2023 11:57:03

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Para cada uno de los ejercicios propuestos, completa de modo que se forme un binomio al cubo.

a. $x^6 + 3x^4y^3 + ___ + y^9$

b. $0.01p^3 - 0.3p^2q^2 + 30pq^4 - ___$

c. $125m^3 + ___ + 1 + 75m^2$

d. $___ + c^3 - 3c^2 - 1$

e. $\frac{8}{27} + ___ + \frac{32}{25}x^2 + \frac{64}{125}x^3$

f. $8a^9 - ___ + ___ - 1331b^{15}$

2. Indica si los siguientes polinomios, al factorizarlos, corresponden a un binomio al cubo. Explica la respuesta en tu cuaderno.

a. $512m^3n^3 - 576m^2n^2pq + 216nmp^2q^2 + 27p^3q^3$

b. $343a^6b^{-12} - 525a^2b^{-4} - 735a^4b^{-8} - 125$

c. $-216q^3r^3 - 72p^2qr + 216pq^2r^2 + 8p^3$

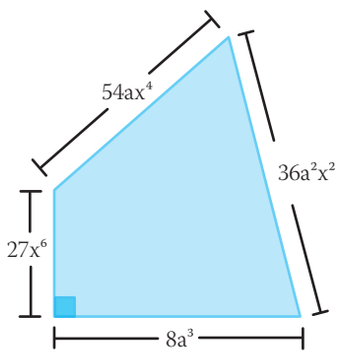
d. $0.125 - 22.5x^4 + 1,350x^6 - 27,000x^{12}$

e. $-x^3 - 3x^2 - 3x - 1$

f. $8 + 36 + 54 + 27$

Solución de problemas

3. La imagen muestra un cuadrilátero con el valor de sus lados.



a. Escribe una expresión o polinomio que represente el perímetro.

b. Factoriza el polinomio obtenido y expresa nuevamente el perímetro de la figura como un binomio al cubo.

c. Calcula el perímetro para $x = 1$ y $a = 2$.

4. Factoriza los siguientes polinomios como cubos de binomios o explica por qué no es posible.

a. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

b. $x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3$

c. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

d. $9m^3 + 6m^2 + 6m + 1$

e. $27m^3 + 27m^2 + 9m + 1$

f. $m^3 - 9m^2 + 27m - 27$

g. $m^3 + 27m^2 + 9m + 27$

h. $8h^3 + 36h^2s + 54hs^2 + 27s^3$

i. $8h^3 - 36h^2s + 54hs^2 - 27s^3$

Razonamiento

5. Para cada una de las siguientes afirmaciones determina si son verdaderas o falsas y justifica tus respuestas.

a. En el cubo de un binomio todos los términos son múltiplos de 3. ☐

b. Si hay tres términos negativos, no es posible factorizar como el cubo de un binomio. ☐

c. Si solo hay un término que es un cubo perfecto, no es posible factorizar como el cubo de un binomio. ☐

6. Factoriza como un binomio al cubo.

a. $-27m^3 + 702m^2n - 6,084mn^2 + 17,576n^3$

b. $0.343x^6 + 3,675x^4 + 13,125x^2 + 15,525$

c. $a - 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} - b$

d. $a^3b^3c^3 - 3a^2b^2c^2pqr + 3abcp^2q^2r^2 - p^3q^3r^3$

DBA: Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 50 04/09/2023 11:57:10

Componente: Numérico-variacional

Sumas o diferencias

Aprendo

Si en esta división le asignas al 4 la letra x y al 2 la letra y, puedes escribirlo de forma generalizada, así:

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \text{ ó } x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

En conclusión, $x^5 - y^5$ es factorizable y puede ser escrito como el producto de dos factores; uno de ellos, $x - y$ y el otro un polinomio de cinco términos (coincide con el valor del exponente), donde los exponentes de x disminuyen de uno en uno y los exponentes de y aumentan simultáneamente de uno en uno.

En general, tenemos cuatro casos de divisiones cuyos numeradores, binomios de potencias de igual exponente, pueden ser o no factorizables:

$$\frac{x^n + y^n}{x + y}; \frac{x^n + y^n}{x - y}; \frac{x^n - y^n}{x + y}; \frac{x^n - y^n}{x - y}$$

Ejemplo

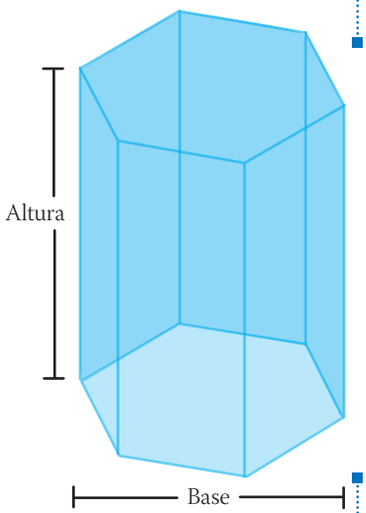
Supón un prisma con volumen $m^3 + n^3$ y área de la base $m + n$. Para hallar la altura debes utilizar uno de los cocientes notables.

$$\frac{m^3 + n^3}{m + n} = m^2 - (m)(n) + n^2 \text{ o } \frac{m^3 - n^3}{m - n} = m^2 + (m)(n) + n^2$$

Puedes entonces transformar los cocientes notables en productos, escribiendo las mismas expresiones de la siguiente manera:

$$m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2) \text{ o } m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$$

A las expresiones de la izquierda de las igualdades se les denomina: **suma de cubos perfectos** y **diferencia de cubos perfectos,** respectivamente. En este caso nos indica que la altura del prisma es $m^2 - mn + n^2$.



Ejemplo

Factorizar $x^6 - 1$.

Solución

Es posible factorizar esta expresión como una diferencia de potencias sextas, dando como resultado $x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

O como una diferencia de cubos $x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$

En este caso puedes efectuar una factorización adicional en el primer factor que es una diferencia de cuadrados, de modo que $x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$

Si se factoriza inicialmente, como una diferencia de cuadrados, se obtienen dos factores que se pueden factorizar como suma y diferencia de cubos

Desempeño: Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 51 04/09/2023 11:57:20

$x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

Esta es la forma más factorizada a la que se puede llegar de este polinomio.

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Observa con atención las siguientes igualdades:

$t^{12} - v^{12} = (t^4)^3 - (v^4)^3$ y $t^{12} - v^{12} = (t^2)^6 - (v^2)^6$

¿Para factorizar $t^{12} - v^{12}$ tomas la expresión equivalente de la primera o de la segunda igualdad? Explica tu decisión.

2. ¿Es $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ un caso particular de una diferencia de dos términos con la forma $x^n - y^n$? ¿Qué argumento expondrías para decir que sí lo es o que no lo es?

Razonamiento

3. Completa la tabla teniendo en cuenta que las expresiones corresponden a la suma o diferencia de cubos.

Expresión	Primer factor	Segundo factor
	$r - 3$	
$-1,000 + 27p^6$		
		$64x^{12} - 8x^6y^5 + y^{10}$
$c^3 - 216$		
	$100 - q^4$	
		$4n^2 - 2n + 1$
	$4ab^2 - 5c^3$	
		$\frac{25}{4}a^2 - \frac{5}{6}ab^{12} + \frac{1}{9}b^{24}$

4. ¿Cuántos términos tiene el segundo factor (polinomio) al factorizar $x^{12} - y^{24}$? Explica.

5. ¿Cuántos términos tiene el segundo factor (polinomio) al factorizar $x^{12} + y^{24}$? Explica.

6. Da un argumento válido de tipo algebraico para explicar cómo en la igualdad $a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$, al multiplicar un polinomio de dos términos por un polinomio de siete términos, se obtiene como resultado un binomio.

7. De los siguientes ejercicios propuestos selecciona cuáles se pueden factorizar y cuáles no. Factoriza aquellos que puedan expresarse como el producto de un binomio por un polinomio.

a. $x^6 + 32y^6$

b. $14,641 - z^8$

c. $w^{10} + 1,024$

d. $0.0001 - r^4$

e. $m^7 - a^7n^7$

f. $t^9 + 512v^9$

8. Identifica el exponente en cada uno de los términos que conforman el binomio y factoriza la expresión.

a. $t^9 + 1$

b. $0^{10} + 32$

c. $w^8 - y^4$

d. $1 - p^8q^8$

e. $243m^5 - 1$

f. $z^{12} + 531,441$

Solución de problemas

9. Pedro es agricultor y cuenta con un terreno rectangular donde realiza sus cultivos (ver imagen). El área de su terreno está dada por la expresión $2,187 + x^7y^{14}$. Determina las expresiones para el ancho y largo del terreno. Toma $A = 2,187 + x^7y^{14}$ como el área o superficie del terreno.



DBA: Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 52 04/09/2023 11:57:38

Componente: Numérico-variacional

Cocientes notables

Aprendo

Se llaman **cocientes notables** a aquellos que obedecen a reglas fijas que pueden ser escritos por simple inspección.

1. Si el divisor es el término $x - y$, todos los signos del cociente notables son positivos (+).
2. Si el divisor es el término $x + y$, se tiene que:
   - **a.** Los términos del lugar impar son positivos (+).
   - **b.** Los términos del lugar par son negativos (–).

Si se conoce la división indicada $\frac{x^m \pm y^n}{x^p \pm y^q}$, se debe cumplir que $\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = r$, donde $r \in \mathbb{Z}^+$.

Por lo tanto, cualquier término del cociente notable se obtiene de la siguiente manera:

$$T_k = (SIGNO)\left(x^p\right)^{r-k}\left(y^q\right)^{k-1};\ 1 \le k \le r$$

Donde T_k es el término en la posición k.

División indicada	Residuo	Cociente notable
La diferencia de dos cantidades con potencias iguales, pares o impares, es divisible por la diferencia de las cantidades.		
$\frac{x^n - y^n}{x - y}$	$\forall n \ge 2$ Residuo $= 0$	$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1}$
La diferencia de dos cantidades con potencias iguales pares, es divisible por la suma de las cantidades.		
$\frac{x^n - y^n}{x + y}$	$\forall n$ par Residuo $= 0$	$x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - y^{n-1}$
La suma de dos cantidades con igual potencia impar es divisible por la suma de las cantidades.		
$\frac{x^n + y^n}{x + y}$	$\forall n$ impar Residuo $= 0$	$x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + y^{n-1}$
La suma de dos cantidades con igual potencia par, NO es divisible ni por la suma ni por la diferencia de las cantidades.		
$\frac{x^n + y^n}{x + y}$	$\forall n$ par Residuo $= 2y^n$	$x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - y^{n-1} - \frac{2y^n}{x+y}$
$\frac{x^n + y^n}{x - y}$	$\forall n \ge 2$ Residuo $= 2y^n$	$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1} + \frac{2y^n}{x-y}$
La diferencia de dos cantidades con igual potencia impar NO es divisible por la suma de las cantidades.		
$\frac{x^n - y^n}{x + y}$	$\forall n$ impar Residuo $= -2y^n$	$x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1} + \frac{2y^n}{x+y}$

Desempeño: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 53 04/09/2023 11:57:40

Ejemplo

Determina si la siguiente división $\frac{x^{55}-y^{11}}{x^{10}-y^{2}}$ es un cociente notable:

Número de términos: $\frac{55}{10}=\frac{11}{2}=5{,}5$ donde r no es un número natural, por lo tanto, este cociente no genera un cociente notable.

Ejemplo

Determina los términos 17 y 38 generados por la siguiente división: $\frac{x^{153}+y^{102}}{x^{3}-y^{2}}$:

Número de términos $=\frac{153}{3}=\frac{102}{2}=51$ donde r es un número natural, por lo tanto, es un cociente notable.

Calcula T_{17} donde la posición 17 corresponde a un número impar, por lo tanto, tiene signo (+).

$$T_{17}=(+)\left(x^{3}\right)^{51-17}\left(y^{2}\right)^{17-1}$$ Término general del cociente notable.

$$=x^{102}y^{32}$$ Simplificando y empleando la propiedad potencia de una potencia.

Ejemplo

Determina el valor de la variable en el cociente notable $\frac{x^{m}-y^{72}}{x^{2}-y^{m}}$ y calcula el 5 del cociente notable.

Número de términos: $\frac{m}{2}=\frac{72}{m}=m^{2}=144=12$ el valor de m=12, entonces.

$$\frac{12}{2}=\frac{72}{12}=6.$$

Calcula T_5 como el divisor es de la forma $x-y$ el signo es (+).

$$T_{5}=(+)\left(x^{2}\right)^{6-5}\left(y^{12}\right)^{6-1}$$ Término general del cociente notable.

$$=x^{2}y^{60}$$ Simplificando y empleando la propiedad potencia de una potencia.

Ejemplo

Calcula el cociente $\frac{z^{11}-2{,}048}{z-2}$

Solución

Notamos que $2{,}048=2^{11}$, y por lo tanto, en el numerador se encuentra una diferencia de potencias iguales. El resultado de la división es:

$z^{10}+2z^{9}+2^{2}z^{8}+2^{3}z^{7}+2^{4}z^{6}+2^{5}z^{5}+2^{6}z^{4}+2^{7}z^{3}+2^{8}z^{2}+2^{9}z+2^{10}$

Esta expresión la puedes escribir también como:

$z^{10}+2z^{9}+4z^{8}+8z^{7}+16z^{6}+32z^{5}+64z^{4}+128z^{3}+256z^{2}+512z+1{,}024$

DBA: Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 54 04/09/2023 11:57:41

Componente: Numérico-variacional

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. En los siguientes ejercicios, emplea las reglas de cocientes notables para simplificar cada uno de los cocientes:

a. $\frac{1-n^3}{1-n}$

b. $\frac{a^5+243}{a+3}$

c. $\frac{64m^6-729n^6}{2m+3n}$

d. $\frac{1+a^7}{1+a}$

e. $\frac{x^6-729}{x-3}$

f. $\frac{x^{27}+y^{27}}{x^y-y^3}$

g. $\frac{8m^3+n^6}{2m+n^2}$

h. $\frac{a^4b^4-64x^6}{a^2b^2+8x^3}$

i. $\frac{25-(a+1)^2}{5+(a+1)}$

j. $\frac{1-a^2b^4c^8}{1-ab^2c^4}$

k. $\frac{x^{24}-1}{x^6-1}$

l. $\frac{m^{16}-n^{16}}{m^4-n^4}$

m. $\frac{a^8-b^8}{a^2+b^2}$

n. $\frac{a^{12}-x^{12}}{a^3-x^3}$

o. $\frac{m^{10}-n^{10}}{m^2-n^2}$

Razonamiento

2. En siguientes ejercicios, determina si la división es un cociente notable:

a. $\frac{x^4-16}{x-2}$

b. $\frac{1-m^8}{1+m}$

c. $\frac{m^{21}+n^{21}}{m^3+n^3}$

d. $\frac{m^{18}-n^{18}}{m^3-n^3}$

3. En los siguientes ejercicios, determina el valor de la variable en cada ecuación:

a. $\frac{m^x+n^{21}}{m^3+n^3}$

b. $\frac{a^x+b^3}{a^2+b^2}$

c. $\frac{x^4-1^a}{1^2+x^2}$

d. $\frac{m^x+n^{27}}{m^9+n^9}$

Solución de problemas

4. En los siguientes ejercicios calcula el término indicado del cociente notable.

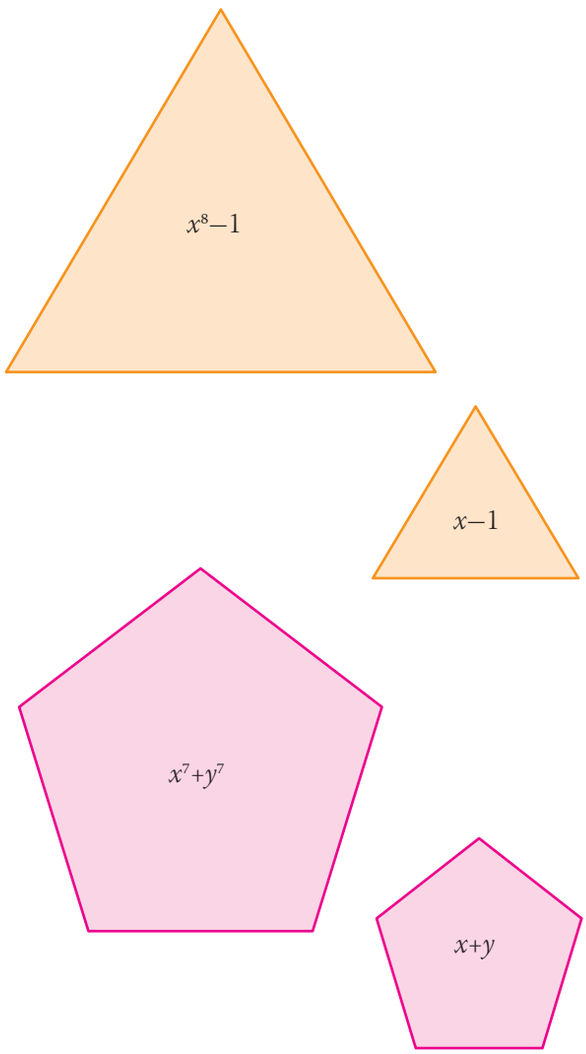
a. $\frac{a^8-b^8}{a+b}$, T_5

b. $\frac{625-x^4}{x+5}$, T_2

c. $\frac{512a^9+b^9}{2a+b}$, T_4

d. $\frac{x^{19}-1}{x-1}$, T_{10}

5. Dadas las siguientes representaciones geométricas en donde el área está representada por una expresión algebraica, determina cuántas veces está el área de la figura, cuya expresión algebraica es de menor grado en la figura, cuya expresión algebraica es de mayor grado.



Desempeño: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 55 04/09/2023 11:57:43

Regla de Ruffini o división sintética

Aprendo

Existe una técnica o procedimiento que puede ser utilizado para factorizar un polinomio dado. Desde un planteamiento formal, estableceremos la manera la en que se puede factorizar un polinomio dado, esto es:

Sea $P = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + ... + Jx + K$ un polinomio de grado n, este puede factorizarse mediante el uso de la regla de Ruffini o técnica de división sintética y transformarse en un polinomio de la forma $P = (x - b_n)(x - b_{n-1})(x - b_{n-2})...(x - b_2)(x - b_1)$ donde $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_2, b_1$ son divisores de K es decir: $b_n \cdot b_{n-1} \cdot b_{n-2} \cdot ... \cdot b_2 \cdot b_1 = K$.

La técnica o método de división sintética consiste en operar solo con los coeficientes A, B, C,…, J y K, y cada uno de los divisores de K, es decir: $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_2$ y b_1. Si la división entre el polinomio y el binomio $(x - b)$ es exacta (residuo cero), entonces $(x - b)$ es un factor de dicho polinomio.

Ejemplo

Factorizar $R(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ mediante el uso de la regla de Ruffini o método de división sintética.

Comienza por identificar los coeficientes de cada término, teniendo en cuenta que los exponentes de x vayan decreciendo, esto es, 1 para x^3, -2 para x^2, -5 para x y 6 como término independiente.

En caso de que algún x^n falte en la secuencia, su coeficiente se toma como cero.

De otro lado, según la definición $K = 6$, se tienen como divisores a $+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6$ y -6, en total ocho divisores. Por ser el polinomio de grado 3, entonces tiene 3 de estos divisores como candidatos para ser factores.

Verificando estos divisores a través del teorema del residuo puedes encontrar que aquellos que dejan residuo 0 son -2 y 3. De esta manera, puedes realizar la divisón sintética entre x+2 y x–3.

Aplicando el método de división sintética con $x = -2$:

-2 ÷ 1 -2 -5 6 **1**	Bajando el 1 por debajo del segmento.
-2 ÷ 1 -2 -5 6 **-2** **1 -4**	Multiplicando el 1 por -2 y sumando los valores, esto es -2 y -2, con lo que se obtiene –4.
-2 ÷ 1 -2 -5 6 **-2 8** **1 -4**	Multiplicando –4 por –2 y sumando los valores, esto es –5 y 8, con lo que se obtiene 3.

DBA: Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 56 04/09/2023 11:57:57

$-2 \div 1 \ -2 \ -5 \ 6$ $\quad\quad -2 \ \ 8 \ -6$ $\quad\quad 1 \ -4 \ -3 \ 0$ ← Residuo	Multiplicando 3 por –2 y sumando los valores, esto es 6 y –6, con lo que se obtiene 0.

Se ha obtenido un residuo cero, lo que indica que la división es exacta. Por lo tanto, $x+2$ es un factor del polinomio dado.

Observa los coeficientes que acompañan al residuo cero en el último procedimiento 1, –4 y 3. Estos forman un polinomio de un grado menor al grado del polinomio dado, esto es x^2-4x+3. Por lo tanto, $R(x)$ puede ser escrito como:

$$R(x)=(x+2)(x^2-4x+3)$$

El trinomio que acompaña a este primer factor puede ser factorizado por medio de métodos tradicionales vistos en capítulos anteriores o también podemos utilizar nuevamente, la división sintética. Escojamos a $x=3$ como candidato a factor, esto es:

$3 \div 1 \ -4 \ \ 3$ $\quad\quad\quad\quad$ $\quad\quad 1$	Bajando el 1 por debajo del segmento.
$3 \div 1 \ -4 \ \ 3$ $\quad\quad\quad\ \ 3$ $\quad\quad 1 \ -1$	Multiplicando 1 por 3 y sumando los valores, esto es –4 y 3, con lo que se obtiene –1.
$3 \div 1 \ -4 \ \ 3$ $\quad\quad\quad\ \ 3 \ -3$ $\quad\quad 1 \ -1 \ \ 0$ ← Residuo	Multiplicando –1 por 3 y sumando los valores, esto es 3 y –3, con lo que se obtiene 0.

Has obtenido un residuo cero, indicando que la división es exacta. Por lo tanto, $x-3$ es un factor del trinomio x^2-4x+3 e indudablemente del polinomio $R(x)$. El tercer factor lo construyes con los coeficientes sobrantes (al lado izquierdo del residuo 0), 1 y –1, por lo tanto, se tiene el factor $x-1$.

Es así como $R(x)=(x+2)(x^2-4x+3)$ puede ser escrito como $R(x)=(x+2)(x-1)(x-3)$ o $R(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$, en términos de tres factores.

El teorema del factor permite identificar rápidamente, cuáles son los divisores que dan como resultado una factorización del polinomio.

Recuerda que...

Si

$P(x)=(x+a)(x+b)(x+c)$

Entonces $(x+a)$, $(x+b)$ y $(x+c)$ son factores de $P(x)$

Desempeño: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 57 04/09/2023 11:58:20

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Estima el valor de verdad (V) o falsedad (F) de los siguientes enunciados. Justifica y argumenta tus respuestas.

Sea $h(t) = t^5 - 21t^3 + 16t^2 + 108t - 144$ una función de altura de un objeto en un instante t determinado, entonces:

a. $(t-3)$ es un factor de la función $h(t)$.

b. $(t+4)$ no es un factor de la función $h(t)$.

c. $(t^2 - 4t + 4)$ es un factor de la función $h(t)$.

d. $t = 3$ es una raíz de la función $h(t)$.

e. $t = 5$ es una raíz de la función $h(t)$.

2. Escribe verdadero (V) o falso (F) en cada caso. Justifica y argumenta tu respuesta.

a. El polinomio $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$ se anula cuando y toma el valor de –2.

b. El polinomio $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$ se anula cuando y toma el valor de –3.

c. El polinomio $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$ puede escribirse como $(y - 3)(y^2 - 4)$ o como $(y + 2)(y - 3)(y - 2)$.

d. El trinomio $3x^4 + x^2 - 5$ no puede descomponerse en factores.

e. El trinomio $3x^4 + x^2 - 2$ no puede descomponerse en factores.

Razonamiento y solución de problemas

3. Factoriza cada polinomio por división sintética y calcula las raíces del mismo.

a. $p^4 + 6p^3 + 3p + 140 = 0$

b. $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6 = 0$

c. $y^4 + 3y^3 - 3y^2 - 11y - 6 = 0$

d. $x^5 + 6x^4 + 5x^3 - 24x^2 - 36x = 0$

e. $t^4 - 2t^2 + 1 = 0$

4. Reescribe el polinomio dado como un producto de factores.

a. $x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x^2$

b. $y^4 + y^3 - 19y^2 - 49y - 30$

c. $m^4 - 9m^2 - 18m - 8$

d. $x^5 + 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

e. $t^6 - 41t^4 + 184t^2 - 144$

5. Para cada uno de los ejercicios propuestos, desarrolla los factores para obtener un polinomio. A partir de este, utilizar división sintética para regresarte a los factores iniciales.

a. $(x-4)(x+2)(x+1)(x-3)$

b. $(x-1)^2(x-2)^2(x+3)$

c. $(a-5)(a+5)(a^2-4)$

d. $(y+7)(y+2)(y-3)(y+1)(y-1)$

e. $(m^2-25)(m^2-16)(m+1)$

6. Determina si cada afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

a. El polinomio $P(x) = x^4 + 8$ no tiene raíces reales, es decir, no se puede factorizar con coeficientes reales.

b. El polinomio $y^5 + 3y^2 - 5y + 2$ tiene raíces reales.

c. El polinomio $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ se puede factorizar como un binomio al cubo.

d. La expresión $m^6n^8 - 64$ no es una diferencia de cuadrados perfectos.

e. $13a^2x + 8y$ se puede factorizar por división sintética.

f. La expresión $x^4 - 5x^2 + 4$ es factorizable.

DBA: Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 58 04/09/2023 11:58:39

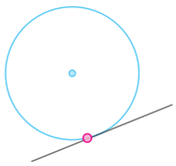
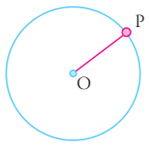
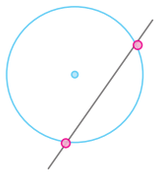
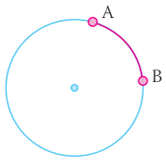
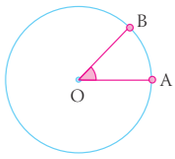
Componente: Métrico-geométrico

Círculo y circunferencia

Aprendo

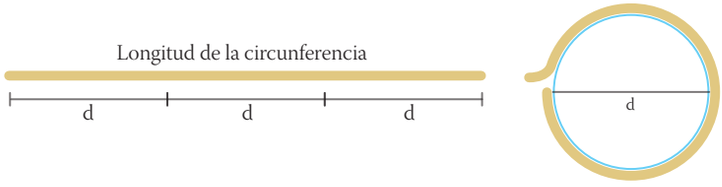
Elementos de la circunferencia

La circunferencia tiene dos tipos de elementos, estos corresponden a las rectas y a los ángulos.

Tangente	Es la recta que toca a la circunferencia en un solo punto.	
Radio	Es el segmento de recta que va del punto central a cualquier punto de la circunferencia. Su medida es la mitad del **diámetro.**	
Cuerda	Es el segmento formado por dos puntos de la circunferencia. Su prolongación se denomina **secante.**	
Arco	Es una parte curva, continua y limitada por dos puntos de la circunferencia.	
Ángulos de la circunferencia	Tienen dos categorías: ángulo central y ángulo inscrito.	
Ángulo central	Es el ángulo cuyos lados son dos radios y el vértice es el centro de la circunferencia.	

Perímetro

Existe una relación constante entre la medida del diámetro de una circunferencia, con las veces que cabe dicho diámetro al bordear la circunferencia, tal y como se muestra en la siguiente figura:



Según el gráfico, el diámetro cabe tres veces y sobra un pequeño pedazo. Al desarrollar este mismo ejercicio con circunferencias de distintos tamaños, esta relación se mantiene, y al ser constante, se le atribuye como número, el cual se conoce como **Pi** y se identifica con el símbolo π.

Desempeño: Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 59 04/09/2023 11:58:40

Esta idea, expresada en lenguaje matemático, es:

$$\pi = \frac{L}{d}$$

Donde L es la longitud de la circunferencia y d es el diámetro. La división es la relación de cuántas veces cabe el diámetro en la longitud de la circunferencia.

Ahora, despejando L:

$$L = \pi d$$

Entonces, la longitud de la circunferencia equivale a Pi veces el diámetro.

También se encuentra esta fórmula con el radio; como ya sabemos, el diámetro es el doble del radio, por lo que también se puede expresar:

$$L = 2\pi r$$

Ejemplo

Para calcular el recorrido que haría Sandra para rodear un parque redondo, con un radio de 150 metros, utiliza la fórmula de longitud de la circunferencia:

$$L = 2\pi r$$

$$L = 2\pi \times 150m$$

$$L = 300\pi m$$

$$L = 300m \times 3.14$$

$$L = 942m$$

Entonces, Sandra recorrerá aproximadamente 942 metros.

Área

Históricamente, se han realizado muchas aproximaciones al área del círculo. Algunas utilizando área de polígonos inscritos y circunscritos o con métodos avanzados y muy precisos. Uno de los que históricamente ha sido más conocido consiste en dividir la circunferencia en varias partes iguales utilizando diámetros y reorganizando tales partes como se muestra a continuación:



Cuando se divide en una mayor cantidad de partes se aproxima a un rectángulo cuyo alto es el radio del círculo y cuyo ancho es la mitad del perímetro.



Por lo tanto, el área del círculo es $r \times \frac{2\pi r}{2} = \pi r^2$.

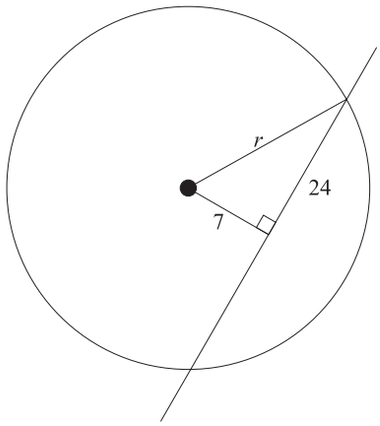
DBA: Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 60 04/09/2023 11:58:41

Ejemplo

Para determinar el radio del círculo, debes aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que está dentro de él.

$$r = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$$



Con este radio puedes calcular el área del círculo:

$$A = \pi \times 25^2 = 3.1416 \times 625 = 1{,}963.5\ m^2$$

Ejemplo

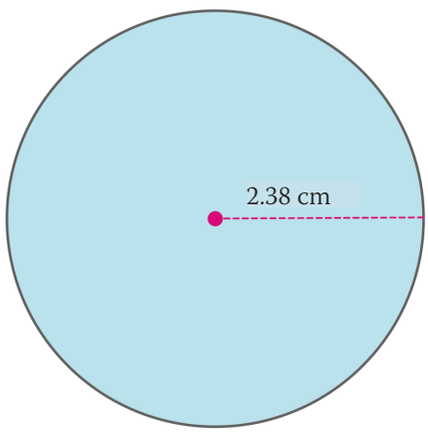
Halla el área de un círculo si se sabe que el perímetro de la circunferencia es 15 cm.

1. Averigua la medida del radio utilizando la información que tienes:

$$C = 2\pi r$$

$$15 \text{ cm} \approx 2 \times 3.14 \times r$$

$$r = \frac{15 \text{ cm}}{2 \times 3.14} = 2.38 \text{ cm}$$



2. Conociendo la medida del radio puedes hallar el área del círculo.

$$A = \pi r^2$$

$$A = 3.14\ (2.38 \text{ cm})^2 = 17.78 \text{ cm}^2$$

Desempeño: Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 61 04/09/2023 11:58:41

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. La relación entre la longitud de la circunferencia de un círculo y su diámetro es el número π. Para obtener un valor aproximado del número π, selecciona tres objetos diferentes de forma circular, mide sus circunferencias y diámetros y registrar los datos en la siguiente tabla. Por último, encuentra la relación entre las dos cantidades.

Objeto	Medida longitud de la circunferencia $2\pi r$	Diámetro d	$\frac{2\pi r}{d}$

2. Completa las siguientes afirmaciones.

a. El radio es igual a _____ con relación al diámetro.

b. Al no tener lados rectos, un círculo no es _____.

c. Una línea secante toca al círculo en _____ puntos.

Razonamiento

3. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia de una rueda de bicicleta de montaña con 559 mm de diámetro?

4. Los *frisbees* con los que se juega últimamente, cuentan con una zona central concéntrica (dos círculos con el mismo centro de diferentes medidas de radio). Esta zona central puede encontrarse con un diámetro mínimo de 50 mm y máximo de 57 mm, ¿cuál será su área mínima y máxima?

5. ¿Cómo se puede expresar algebraicamente el área del círculo formado en una ronda infantil, donde los niños están a x pasos de otro niño ubicado en el centro de la ronda?, ¿cuál sería la forma de expresar el diámetro?

6. Dos ruedas tienen 6 cm y 18 cm de longitud en sus respectivas circunferencias, ¿qué relación hay entre sus radios?

Solución de problemas

7. Determina si cada una de las proposiciones es verdadera (V) o falsa (F).

a. Un diámetro de un círculo es la secante del círculo.

b. La intersección de una línea y un círculo puede ser vacía.

c. Un radio es una cuerda de un círculo.

d. Una cuerda de un círculo contiene exactamente dos puntos de un círculo.

e. Una línea recta puede cortar un círculo en un único punto.

8. En el videojuego *Call of Duty: World at war*, en la misión llamada *Caída*, aparece como escenario la Cúpula de Reichstag. Este edificio está ubicado en Berlín y tiene un diámetro de 40 m, ¿cuánto mide su semicircunferencia?

9. El polígono regular de doce lados, inscrito en una circunferencia, forma 12 arcos. Si el radio es de 4 cm, ¿cuál es la medida de cada arco?

10. Un círculo tiene perímetro igual a nueve veces el perímetro de otro. Decide cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y justifica tus respuestas en el cuaderno.

a. El radio del círculo mayor es nueve veces el radio del círculo menor.

b. El área del círculo mayor es nueve veces el área del círculo menor.

DBA: Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales..

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 62 04/09/2023 11:58:42

Componente: Aleatorio

Medidas de tendencia no central

Aprendo

Percentiles

Los **percentiles** son una medida de tendencia no central, correspondiente a los valores que dividen el conjunto de datos en porcentajes, obteniendo de esta manera 100 partes iguales.

De igual manera, los percentiles 25, 50 y 75, corresponden a los tres valores que dividen al conjunto de datos ordenados en cuatro partes porcentualmente iguales, estos se denominan **cuartiles**.

Para hallar la posición donde encontramos los percentiles, se realiza el siguiente proceso:

Organizar los datos de manera ascendente.

Resolver la expresión:

$$P_x = \frac{x \times n}{100}$$

Donde:

$P_x \rightarrow$ posición del dato del percentil x

$x \rightarrow$ percentil que se quiere encontrar

$n \rightarrow$ total de datos

Deciles

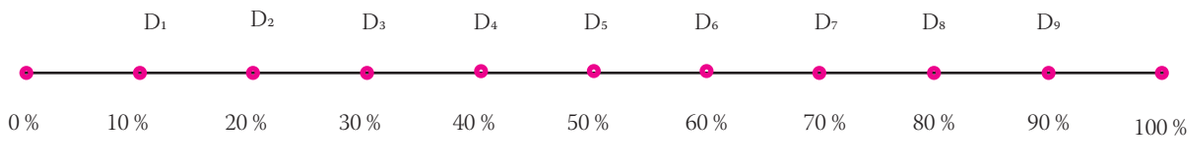
Los **deciles** son una medida de tendencia no central que dividen al conjunto de datos en 9 partes iguales, los cuales equivalen a los porcentajes 10 %, 20 %, 30 % 40 %, 50 %, 60 %, 70 %, 80 % y 90 %.

D_1 = Valor que deja por debajo el 10 % de los datos.

D_2 = Valor que deja por debajo el 20 % de los datos.

D_5 = Valor que deja por debajo el 50% de los datos. (Corresponde a la mediana).

D_9 = Valor que deja por debajo al 90% de los datos.



Para hallar la posición donde se encuentran los deciles realizas el siguiente proceso:

1. Organizar los datos de forma ascendente.
2. Resolver la expresión $D_x = \frac{x \times n}{10}$

Donde: $x \rightarrow$ decil que se quiere encontrar

$n \rightarrow$ total de datos

Desempeño: Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón).

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 63 04/09/2023 11:58:44

Ejemplo

Con el fin de evaluar el rendimiento en ventas que ha generado la inmobiliaria Vivamos Bien en el ámbito inmobiliario, el gerente solicita un informe que indique la cantidad de inmuebles vendidos en el transcurso del año 2020. El departamento de ventas presenta en la siguiente tabla tal información:

Mes	Ventas	Venta acumulada
Enero	29	29
Febrero	20	49
Marzo	27	76
Abril	34	110
Mayo	33	143
Junio	26	169
Julio	29	198
Agosto	30	228
Septiembre	32	260
Octubre	28	288
Noviembre	31	319
Diciembre	30	349

Vamos a hallar el percentil 30, por lo que se resuelve la siguiente expresión:

$$P_x = \frac{x \cdot n}{100}$$

$$P_{30} = \frac{30 \cdot 349}{100}$$

$$P_{30} = \frac{10{,}470}{100}$$

$$P_{30} = 104.7$$

Así, al vender el inmueble número 105 se habrán vendido el 30 % de los inmuebles del año. Para determinar en qué mes ocurrió esto, debes verificar con la tabla de frecuencias acumuladas.

Como 110 es la primera frecuencia acumulada que supera a 104.7, se puede afirmar que el 30 % de los inmuebles se vendieron en los primeros cuatro meses.

Vamos a hallar el decil 4, por lo que al resolver la siguiente expresión, se tiene:

$$D_x = \frac{x \cdot n}{10}$$

$$D_4 = \frac{4 \cdot 349}{10}$$

$$D_4 = \frac{1{,}396}{10}$$

$$D_4 = 139.6$$

En el mes de mayo, la frecuencia acumulada supera 139.6, de modo que puedes asegurar que al final de mayo se habían vendido más de las 4 décimas partes de los inmuebles que se venderían este año.

DBA: Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales..

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 64 04/09/2023 11:58:46

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. ¿Para qué sirven los deciles y los percentiles?

2. ¿En qué caso se usan los deciles y en qué caso, los percentiles?

3. Explica cómo hallarías el decil 5 (D_5) de un conjunto de 30 datos.

4. ¿A qué decil corresponde la mediana? ¿Por qué?

Razonamiento

5. En la siguiente tabla se registran las edades de 16 estudiantes:

11	13	13	16
15	14	15	11
12	16	14	10
12	15	10	13

En la tabla anterior:

- **a.** ¿Cuál es el percentil 23? ¿Qué representa tal dato?
- **b.** ¿Cuál es el percentil 50? ¿Qué representa tal dato?
- **c.** ¿Cuál es el percentil 89? ¿Qué representa tal dato?

Solución de problemas

6. Encuentra en los siguientes datos el valor que queda por debajo del 70 %.

17	18	18	20	25	28
30	33	35	39	40	

7. Se quiere saber cuántas personas entran al estreno de una película en diferentes salas de cine, los datos son los siguientes:

Número de sala	Número de personas
Sala 1	49
Sala 2	54
Sala 3	36
Sala 4	48
Sala 5	50
Sala 6	40
Sala 7	46
Sala 8	52

Halla las medidas de tendencia no central (deciles) y luego obtén algunas conclusiones al respecto.

- **a.** Decil 4.
- **b.** Decil 7.
- **c.** Decil 9.

8. En una carrera de atletismo se registraron los siguientes tiempos de 10 competidores:

3.21	4.18	4.53	4.35	4.01
4.26	5.00	3.72	4.32	4.46

Halla las medidas de tendencia no central (percentiles) y luego obtén algunas conclusiones al respecto.

- **a.** Percentil 30.
- **b.** Percentil 60.
- **c.** Percentil 80.

9. En un jardín infantil se registra mensualmente el peso de los niños, con el fin de elaborar la curva de crecimiento de estos. El peso en kilogramos (kg) de 24 niños registrado en el último control se presenta a continuación:

8.5	10.3	10	10.5	9.3	9.4
10.8	10.2	10.6	9.3	10.8	9.5
7.6	9.0	8.9	8.5	9.9	10.5
8.4	10.5	8.6	7.8	8.7	9.6

Halla las medidas de tendencia no central (deciles 3, 5, 7 y 9) y luego obtén algunas conclusiones al respecto.

Desempeño: Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón).

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 65 04/09/2023 11:58:46



Educación Económica y Financiera (E.E.F.)

Costos y utilidades

Aprendo

En finanzas y economía es fundamental conocer cuáles son las formas de costear un producto y, asimismo, conocer cómo sacar su ganancia. Para ello se deben definir todos los conceptos relacionados con utilidad:

Costo variable: es el gasto que se presenta en la producción unitaria de cierto producto, este depende exclusivamente de la cantidad de artículos producidos, ejemplos: La mano de obra, la materia prima, entre otros.

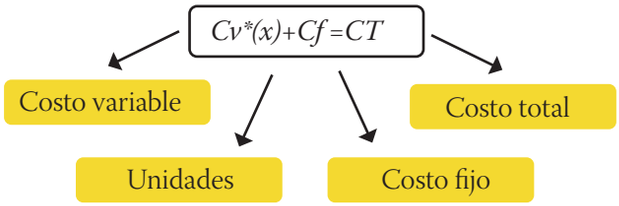
Fórmula costo variable (costo variables x unidades de producción).

Costo fijo: es el gasto generado a partir de tasas o cuotas fijas que no depende necesariamente de la producción, este costo puede estar asociado a pagos que se repiten periódicamente, ejemplos: Los arriendos, la telefonía fija, entre otros.

Costo total: es la suma de todos los costos de un producto:

(Costo variable x unidades de producción) + Costo fijo = Costo total.

Podemos abreviar la ecuación a la siguiente fórmula:



Ingresos: es la cantidad de dinero que ingresa de acuerdo al número de productos vendidos

$ingresos = \ precio\,de\,venta * unidades\,vendidas$

$i = pv*(x)$

Utilidad: es la diferencia entre los ingresos y el costo total:

Utilidad = ingresos – costo total.

Se puede expresar en la siguiente fórmula:

$$U = pv(X) - (Cv*(x) + cf)$$

Exploro el tema

La compañía Z, dedicada a la fabricación y venta de productos de aseo, tiene que para la elaboración de uno de sus productos invierte entre mano de obra y materia prima la suma de Q2, 500.00 por unidad, y que mensualmente posee unos costos fijos de Q2, 000,000, por lo tanto, decide vender sus productos un 30 % más de lo que le cuestan.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 66 04/09/2023 11:58:47

Resuelvo

1. Para el cálculo de precio de venta, se requiere el costo variable que es lo que cuesta la fabricación unitaria:

$$Precio\ de\ venta = costo\ variables + 30\ \%$$

$$Q2{,}500.00 \times 30\ \% = 750$$

$$Precio\ de\ venta = Q2{,}500.00 + Q750.00 = Q3{,}250.00$$

El precio de venta es de Q3,250.00

2. Para el cálculo de costos, es necesario definir las variables conocidas, veamos:

$$costo\ variables = Q2{,}500.00\ por\ unidad$$

$$costo\ fijo = Q20{,}000.00$$

$$x = 500$$

La ecuación resulta $CT = cv(x) + cf$

Reemplazamos en la ecuación

Tenemos CT = 2,500 (500) + 20,000

El costo total de producir 500 unidades es: 3,350,000 quetzales

3. Ahora utilizamos la información de utilidades:

$$U = pv\ (X\ ) - (Cv^{*}(\ x) + cf\ )$$

$$U = 3{,}250^{*}\ (850) - (2{,}500\ (850\ ) + \ 2{,}000.000\ )$$

$$U = 26776267500 - (4{,}125\ 000)$$

$$U = -1{,}362{,}500$$

Practico y aplico

1. La empresa vende su producto en Q28,000.00 por unidad y tiene prevista la venta de 2,000 unidades.

Calcula:

A. El costo total para la compañía en el mes de julio.

B. La utilidad de la empresa.

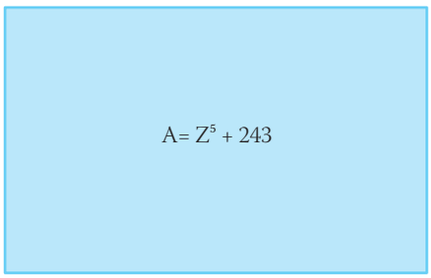
L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 67 04/09/2023 11:58:48

Evaluación tipo Saber

Comunicación

Responde las preguntas 1, 2 y 3 de acuerdo con la información contenida en la siguiente imagen:

En el rectángulo se muestra un polinomio que representa su área en cm^2.



1. La expresión algebraica que mejor representa la base del rectángulo en cm es

A. $z^4 + 3z^3 - 9z^2 - 27z + 81$
B. $z^4 - 3z^3 + 9z^2 + 27z - 81$
C. $z^4 - 3z^3 + 9z^2 - 27z + 81$
D. $z^4 + 3z^3 + 9z^2 + 27z + 81$

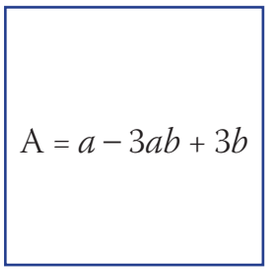
2. La representación algebraica que mejor representa la altura del rectángulo es

A. $z - 3$ **B.** $z + 3$ **C.** $z^2 - 9$ **D.** $z^2 + 9$

3. La cantidad en cm^2 que mejor se aproxima al área del rectángulo cuando z toma el valor de 2.4 es

A. 322 **B.** 232.6 **C.** 232 **D.** 322.6

Teniendo en cuenta la siguiente figura, responde las preguntas 6, 7 y 8:



6. El perímetro de la figura está representado por:

A. $2a + 6b - 4$
B. $-2a + 6b + 4$
C. $2a + 6b + 4$
D. $2a - 6b + 4$

7. El área de la figura es equivalente a la expresión

A. $(a + 1)(1 + 3b)$
B. $(a + b)(1 + ab)$
C. $(a - 1)(1 + 3b)$
D. $(a - 1)(1 - 3b)$

8. El valor numérico del área para $a = 2$, $b = 1$ es

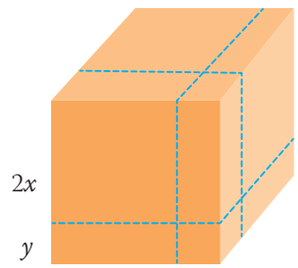
A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

9. Si $(x + 2)(x + b) = x^2 + cx + 6$, entonces el valor de c es

A. -3 **B.** -1 **C.** 5 **D.** 1

Razonamiento

Observa el siguiente cubo y la medida de su arista:



10. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa correctamente el volumen de este cubo?

I. $(2x)^3 + y^3$
II. $(4x^2 + 4xy + y^2)(2x + y)$
III. $8x^3 + 8x^2 y + 4xy^2 + y^3$

A. I solamente **C.** II y III Solamente
B. II solamente **D.** I, II y III

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 68 04/09/2023 11:59:01

En el siguiente dibujo aparecen un rectángulo y la medida de uno de sus lados:

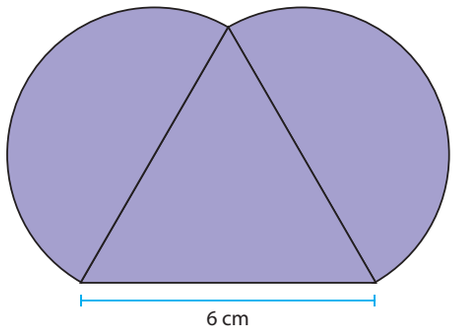
$x + 5y$



11. ¿Cuál es la medida del otro lado si se sabe que el área de este rectángulo es $3x^2 + 17xy + 10y^2$?

A. $(3x + 2y)$ **B.** $(3x + 10y)$ **C.** $(x + 5y)$ **D.** $(x + 2y)$

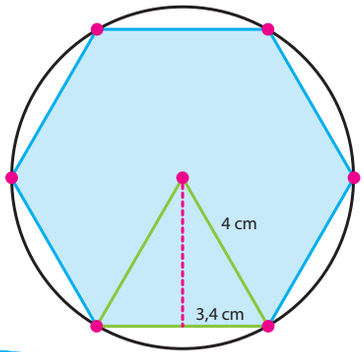
La figura aparece dividida en tres regiones parciales: un triángulo equilátero de 6 cm de lado y dos semicírculos.



12. ¿Cuál es el perímetro de la figura?

A. $18 + \pi \times 3^2$ **B.** $6 + 2\pi \times 3$
B. $18 + 2\pi \times 3^2$ **D.** $6 + 4\pi \times 3$

En la ilustración se presenta un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio. El apotema del hexágono mide 3,4 cm.



13. ¿Cuál es el área en cm^2 del hexágono?

A. 40.8 **B.** 55.2 **C.** 60.4 **D.** 81.6

Las preguntas 8, 9, 10, 11 y 12 se contestan con la siguiente información.

En la siguiente tabla se registra el número de personas que entraron a una tienda durante una semana:

Día	Número personas
Lunes	30
Martes	22
Miércoles	15
Jueves	38
Viernes	40
Sábado	29
Domingo	18

14. ¿Cuál es el decil 2?

A. El 20 % de las personas fueron 22 o menos.
B. El 20 % de las personas fueron 15 o menos.
C. El 20 % de las personas fueron 18 o menos.
D. El 20 % de las personas fueron 20 o menos.

15. ¿Cuál es el decil 7?

A. El 70 % de las personas fueron 30 o menos.
B. El 70 % de las personas fueron 15 o menos.
C. El 70 % de las personas fueron 38 o menos.
D. El 70 % de las personas fueron 29 o menos.

16. ¿Cuál es el percentil 38?

A. El 38 % de las personas fueron 18 o menos.
B. El 38 % de las personas fueron 22 o menos.
C. El 38 % de las personas fueron 30 o menos.
D. El 38 % de las personas fueron 29 o menos.

17. ¿Cuál es el percentil 59?

A. El 59 % de las personas fueron 40 o menos.
B. El 59 % de las personas fueron 30 o menos.
C. El 59 % de las personas fueron 28 o menos.
D. El 59% de las personas fueron 29 o menos.

L8_Unidad_2_2021 Indiv.indd 69 04/09/2023 11:59:02

Unidad 3

Álgebra, el plano y medidas de dispersión

¿Qué aprenderé?

- Ecuaciones y funciones
- Plano cartesiano
- Medidas de dispersión

¿Qué lograré?

- ✔ Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.
- ✔ Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
- ✔ Describo la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ellos y la comparo con la manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos.



Expresiones racionales

Aprendo

Una **expresión racional** es una expresión de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, tal que $Q(x) \neq 0$, es decir, el cociente entre los polinomios no está definido para los valores de x que anulen el polinomio $Q(x)$, estos valores se denominan **indeterminaciones de la expresión racional**.

Por ejemplo, son expresiones racionales:

1. $\frac{x^3+8}{x}$ para $x \neq 0$
2. $\frac{(x^2+9)(x-1)^3}{x^3-8}$ para $x \neq 2$
3. $\frac{x^2-9}{x+3} = (x-3)$ para $x \neq -3$
4. $\frac{x-4}{x^2-16} = \frac{1}{(x+4)}$ para $x \neq \pm 4$

Además de tener la misma forma que los números racionales, las expresiones racionales también se pueden representar de diferentes formas, observa:

Representación de números racionales	Representación de expresiones racionales	Ejemplo
$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$	$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-P(x)}{-Q(x)}$	$\frac{x^5+3x-2}{4x^2+4x+1} = \frac{-x^5-3x+2}{-4x^2-4x-1}$
$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$	$-\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{-Q(x)}$	$-\frac{x+3}{x-9} = \frac{-x-3}{x-9} = \frac{x+3}{-x+9}$
$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ con $c \neq 0$	$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c \cdot P(x)}{c \cdot Q(x)}$ con $c \neq 0$	$\frac{x^6+2x^5}{x+8} = \frac{4x^6+8x^5}{4x+32}$
Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces, $a \cdot d = c \cdot b$	Si $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$ entonces, $P(x) \cdot S(x) = R(x) \cdot Q(x)$	$\frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ entonces, $(x+2)(x^2-1) = (x-2)(x^2+1)$

Ejemplo

$$\frac{x^2-9x}{x^4-4x^3-45x^2} = \frac{x(x-9)}{x^2(x^2-4x-45)}$$

Simplifica la expresión sacando factor común tanto a numerador como a denominador

$$\frac{x(x-9)}{x^2(x^2-4x-45)} = \frac{x(x-9)}{x^2(x+5)(x-9)}$$

Factorizando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Desempeño: Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 71 04/09/2023 11:57:03

$$\frac{x(x-9)}{x^2(x+5)(x-9)} = \frac{1}{x(x+5)}$$

Cancelando los factores comunes, teniendo en cuenta las indeterminaciones, en este caso $x \neq 0$, $x \neq -5$ y $x \neq 9$

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Determina cuáles de las siguientes expresiones son expresiones racionales algebraicas. Justifica tu respuesta.

a. $x^5 + 6$

b. $\frac{45x^2 + 6x + 3}{2x}$

c. $\frac{5x+3}{8}$

d. $\frac{75}{13}$

e. $(4 - x^3)(4 + x^3)$

f. $\frac{x}{(x-5)^2(x^2+9)}$

2. Escribe dos expresiones racionales equivalentes mediante el cambio de signos $-\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{-Q(x)}$. No olvides hacer explícitas las indeterminaciones en cada caso.

a. $\frac{x+1}{1-x}$

b. $\frac{x^2-4}{4-x^2}$

c. $\frac{-x}{4-x}$

d. $\frac{1-x^2}{x^3-2x^2+x-5}$

e. $-\frac{x}{3x^2-4x}$

f. $\frac{-(x+2)^2}{x^3-8}$

3. Simplifica las siguientes expresiones racionales algebraicas. No olvides indicar las indeterminaciones correspondientes.

a. $\frac{x^3+5x^2+10x+12}{x^3+3x^2-4x-12}$

b. $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x+2}$

c. $\frac{x^3-3x^2-16x+48}{x^3-11x^2-8x+48}$

d. $\frac{x^3+3x^2-10x}{x^2+3x-10}$

e. $\frac{x^2+x-2}{x^4+x^3-2x^2}$

f. $\frac{x^3+6x^2-7x-60}{x^3-7x-6}$

Razonamiento y solución de problemas

4. Explica con tus palabras lo que significan las indeterminaciones de una expresión racional algebraica. Acompaña tu explicación con un ejemplo.

5. Analiza las siguientes expresiones racionales y halla sus indeterminaciones. Justifica tus procedimientos.

a. $\frac{(x-1)(x+2)}{x+5}$

b. $\frac{(x+8)(x-10)}{x(x+3)}$

c. $\frac{(x-3)(x+5)^2}{(x-1)(x-4)}$

d. $\frac{x^3+10x^2+25}{x^2+6x-16}$

e. $\frac{(x+3)^3}{x^3+9x^2+27x+27}$

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 72 04/09/2023 11:57:09

Componente: Numérico-variacional

Mínimo común múltiplo de polinomios

Aprendo

El **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** entre de dos o más expresiones algebraicas es la menor expresión que es múltiplo común a todas ellas.

El procedimiento para hallar el m.c.m. de dos o más expresiones algebraicas consiste en factorizar cada expresión y tomar de ellas los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, así:

Ejemplo

Para hallar el m.c.m. $\left[(-3x^4+14x-8),(3x^4-26x^3+64x^2-32x)\right]$ procedemos:

1. Se factorizan al máximo las dos expresiones algebraicas:

   $-3x^2+14x-8=(3x-2)(4-x)$ y $3x^4-26x^3+64x^2-32x=x(3x-2)(4-x)^2$

2. Se toman las expresiones comunes y no comunes con su mayor exponente, es decir que el m.c.m. quedaría:

   $$\text{m.c.m.}\left[(-3x^2+14x-8),(3x^4-26x^3+64x^2-32x)\right]=x(3x-2)(4-x)^2$$

En este caso, el m.c.m. es una de las expresiones, sin embargo, puede ser o no igual a una de ellas.

Observa los siguientes grupos de expresiones algebraicas. Desarrolla los procesos de factorización en tu cuaderno.

Expresiones algebraicas (polinomios)	Expresiones algebraicas (factorización)	m.c.m.
x^2+2x+1 x^3+3x^2+3x+1	$(x+1)^2$ $(x+1)^3$	$(x+1)^3$
$5x^2+3x$ $5x^3-3x^2$	$x(5x+3)$ $x^2(5x-3)$	$x^2(5x+3)(5x-3)$
x^2+x-6 x^3+6x^2+9x x^3-3x-2	$(x+3)(x-2)$ $x(x+3)^2$ $(x-2)(x+1)^2$	$x(x+3)^2(x-2)(x+1)^2$
$8x^3+20x^2-50x-125$ $8x^3-60x^2+150x-125$ $4x^2-25$	$(2x-5)(2x+5)^2$ $(2x-5)^3$ $(2x-5)(2x+5)$	$(2x+5)^2(2x-5)^3$
x^5-x x^3-6x^2+9x-4 x^2-2x-8	$x(x+1)(x-1)(x^2+1)$ $(x-4)(x-1)^2$ $(x+2)(x-4)$	$x(x+1)(x-1)^2(x^2+1)(x-4)(x+2)$
$18x^3+24x^2-160x+128$ $4x^2+14x-8$ $12x^3+26x^2-80x+32$ $4x^2-4x+1$	$2(x+4)(3x-4)^2$ $2(2x-1)(x+4)$ $2(3x-4)(2x-1)(x+4)$ $(2x-1)^2$	$2(3x-4)^2(2x-1)^2(x+4)$

Desempeño: Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 73 04/09/2023 11:57:16

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Relaciona las parejas de expresiones de la columna de la izquierda con su respectivo m.c.m. que se encuentra en la columna de la derecha.

◆ $x^2+8x+15$ $x^2+10x+25$	$x^3-5x^2-25x+125$
◆ $12x^2+16x-6$ $12x^2+32x-16$	$(3x-2)(3x+2)(4x+8)$
◆ $25-10+x^2$ $25-x^2$	$(9x+1)(x+9)(9x-1)$
◆ $9x^2+82x+9$ $9x^2+80x-9$	$x^3+13x^2+55x+75$
◆ $4x^2+28x+40$ $4x^2+44x+72$	$(x+5)(4x+8)(x+9)$

2. Halla el m.c.m. de las siguientes expresiones algebraicas:

a. $x^2+5x-24$
 x^2-6x+9

b. $-x^2-x+6$
 $-x^2-3x+10$

c. $5x^2-39x-8$
 $3x^2-10x-8$
 x^2+5x+4

d. x^2-9x
 x^2-81
 $x^2-18x+81$
 $x^2+18x+81$

e. x^2-6x+9
 x^2+6x+9
 x^2+3x
 x^2-3x

f. x^2-5x
 x^3+5x^2
 $2x^4-5x^3$

Razonamiento

3. Escribe (V) si las siguientes afirmaciones son verdaderas o (F) si son falsas. Justifica tu respuesta.

a. El m.c.m. $\left[(x^2+5x+6),(x^2+3x+2)\right]=$ $(x+3)(x+1)(x+2)$ ☐

b. La expresión x^2-25 es el mínimo común múltiplo de las expresiones: $x^2+10x+25$; $x^2-10x+25$ y x^2-25 ☐

c. El m.c.m. $\left[(x^2+11x+24),(x^2-17x+72)\right]=$ $(x+3)(x+8)(x-9)$ ☐

d. La expresión $(x+2)^3(x-2)$ es el mínimo común múltiplo entre $x^3+6x^2+12x+8$; x^2+4x+4 y x^2-4 ☐

Solución de problemas

4. Observa el procedimiento que desarrollaron Antonia y Juliana para hallar el m.c.m. de las expresiones dadas. Halla los errores en cada procedimiento y corrígelos.

Expresiones:

◆ x^2-25 ◆ $x^2+10x+25$

Procedimiento de Antonia

Se factorizan las expresiones algebraicas:

◆ $x^2-25=(x-5)^2$ ◆ $x^2+10x+25=(x+5)^2$

Luego, se comparan los factores y se toman los comunes y no comunes con el mayor exponente, así:

$$\text{m.c.m.}\left[(x^2-25),(x^2+10x+25)\right]=(x-5)^2(x+5)^2$$

Procedimiento de Juliana

Se factorizan las expresiones algebraicas:

◆ $x^2-25=(x-5)(x+5)$ ◆ $x^2+10x+25=(x+5)^2$

Luego, se comparan los factores y se toman los comunes y no comunes con el menor exponente, así:

$$\text{m.c.m.}\left[(x^2-25),(x^2+10x+25)\right]=(x-5)(x+5)$$

Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 74 04/09/2023 11:57:41

Componente: Numérico-variacional

Máximo común divisor de polinomios

Aprendo

El **máximo común divisor** (m.c.d.) de dos o más expresiones algebraicas es la mayor expresión que es divisor común a todas ellas, es decir, que las divide exactamente (con residuo igual a 0).

El procedimiento para hallar el m.c.d. de dos o más expresiones algebraicas consiste en factorizar cada expresión y tomar de ellas los factores comunes con su menor exponente, así:

Ejemplo

Para hallar el m.c.d. $\left[(x^2+2x-15),(x^3+10x^2+25x)\right]$:

1. Se factorizan al máximo las dos expresiones algebraicas:
   - $x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$
   - $x^3+10x^2+25x=x(x+5)^2$
2. Se toman las expresiones comunes con su menor exponente, es decir que el m.c.d. quedaría:

   m.c.d. $\left[(x^2+2x-15),(x^3+10x^2+25x)\right]=(x+5)$

En este caso, el m.c.d. no es una de las expresiones, sin embargo, puede ser o no igual a una de ellas.

Ejemplo

Halla el máximo común divisor de las expresiones:

- $2x^3+11x^2+17x+6$
- $x^3+10x^2+31x+30$
- $x^3+8x^2+21x+18$

Factoriza en su totalidad cada polinomio:

- $2x^3+11x^2+17x+6$
  $=(2x+1)(x^2+5x+6)$
  $=(2x+1)(x+3)(x+2)$
- $x^3+10x^2+31x+30$
  $=(x+3)(x^2+7x+10)$
  $=(x+3)(x+5)(x+2)$
- $x^3+8x^2+21x+18$
  $=(x+2)(x^2+6x+9)$
  $=(x+2)(x+3)^2$

Compara las expresiones en busca de los factores comunes y el respectivo menor exponente, así:

Expresión (polinomio)	Factorización	Factor o factores comunes	Menor exponente	m.c.d.
$2x^3+11x^2+17x+6$	$(2x+1)(x+3)(x+2)$	$(x+3)$	1	$(x+3)(x+2)$
$x^3+10x^2+31x+30$	$(x+3)(x+5)(x+2)$			
$x^3+8x^2+21x+18$	$(x+2)(x+3)^2$	$(x+2)$	1	

Así, el m.c.d. $\left[(2x^3+11x^2+17x+6),(x^3+10x^2+31x+30),(x^3+8x^2+21x+18)\right]=(x+3)(x+2)$

Desempeño: Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 75 04/09/2023 11:58:19

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Halla el máximo común divisor entre las siguientes expresiones:

a. $x^3 - 18x^2 + 96x - 128$
$x^3 - 12x^2 + 36x - 32$
$x^3 - 9x^2 + 6x + 16$

b. $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$
$x^3 + 7x^2 + 15x - 9$
$x^3 - x^2 - 21x + 45$
$x^3 - 11x^2 + 39x - 45$

2. Escribe tres expresiones cuyo máximo común divisor sea:

a. $x^2 + 3x + 2$

b. $x^2 + 16x + 64$

c. $x^3 - 3x^2$

d. $x^2 - 25$

e. $8 - 12x + 6x^2 - x^3$

Solución de problemas

3. Camila quiere repartir las cajas de naranjas que llegan a la fábrica de jugos, estas cajas están representadas por la expresión $x^3 + 10x^2 + 225x - 648$, y las cajas de fresas, que están representadas con la expresión $x^3 - 7x^2 - 80x + 576$. De acuerdo con la información, contesta:

a. ¿La expresión que debe hallar Camila corresponde al máximo común divisor o al mínimo común múltiplo entre las expresiones dadas? Justifica tu respuesta.

b. Halla la expresión algebraica entre la cual se pueden dividir las dos expresiones dadas.

4. Santiago quiere poner en cajas $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ lápices negros y $x^3 + 9x^2 + 24x + 20$ lápices rojos, de modo que cada caja contenga el mismo número de lápices negros o lápices rojos y además el mayor número posible de cada uno. De acuerdo con la información, responde:

a. ¿La expresión que debe hallar Santiago corresponde al máximo común divisor o al mínimo común múltiplo entre las expresiones dadas? Justifica tu respuesta.

b. Halla la expresión algebraica que representa la cantidad de piezas que Santiago debe empacar en cada caja.

5. ¿Cuál es la expresión que representa la mayor longitud de una baldosa cuadrada que cabe en un número exacto de veces en una sala de dimensiones $x^2 - 1$ por $x^4 + x^3$?

a. Para hallar la expresión que representa la longitud de la baldosa, ¿debes hallar el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo? Justifica tu respuesta.

b. ¿La expresión que representa la longitud es $x^5 - x^3$? Justifica tu respuesta.

6. El producto de dos polinomios es $(x^2 - 1)^2$ y el cociente de su mínimo común múltiplo y su máximo común divisor es $(x - 1)^2$. El máximo común divisor de dichos polinomios es:

a. $x + 1$

b. $x^2 + 1$

c. $(x + 1)^2$

d. $(x - 1)^2$

e. $x - 1$

7. En una empresa empacan lápices en paquetes con una cantidad definida. En un pedido para una papelería entregan $2x^3 - 11x^2 - 21x$ y a otra papelería le entregan $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$. Halla el máximo común divisor para averiguar la cantidad de lápices que vienen en cada paquete.

Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 76 04/09/2023 11:58:36

Componente: Numérico-variacional

Operaciones aditivas entre expresiones racionales

Aprendo

Para adicionar o sustraer expresiones racionales algebraicas se deben tener en cuenta dos casos:

1. Si las expresiones racionales tienen como **denominador la misma expresión racional**, es decir, si son **homogéneas**, en cuyo caso el resultado de la adición o sustracción será la expresión que tiene como numerador la adición o sustracción de los numeradores, y como denominador el mismo de las expresiones que se están adicionando o sustrayendo.
2. Si las expresiones racionales tienen como **denominador una expresión racional diferente**, es decir, si son **heterogéneas**, se debe hallar el mínimo común múltiplo entre los denominadores para luego aplicar la amplificación o simplificación en cada expresión y encontrar expresiones homogéneas.

Ejemplo

Para adicionar las expresiones racionales: $\frac{2x-8}{x-5}+\frac{x^2+6x}{x^2-25}$ debes factorizar en su totalidad las expresiones para poder hallar el mínimo común múltiplo entre los denominadores. En este caso solo debes factorizar la segunda expresión, pues la primera está totalmente factorizada.

$x^2-25=(x-5)(x+5)$

Por lo tanto, el m.c.m. $\left[(x-5),(x^2-25)\right]=(x+5)(x-5)$

Ideas clave...

Para adicionar o sustraer dos o más expresiones racionales el proceso más sencillo es tener las expresiones homogéneas, para lo cual se puede utilizar la amplificación y la simplificación teniendo en cuenta el mínimo común múltiplo entre los denominadores.

Ahora, amplifica la primera expresión por $(x+5)$ para que las dos expresiones que vas a sumar sean homogéneas, es decir, tengan el mismo denominador, así:

$$\left[\frac{(x+5)}{(x+5)}\cdot\frac{(2x-8)}{(x-5)}\right]+\frac{x^2+6x}{(x+5)(x-5)}$$

De esta manera, obtienes las expresiones racionales homogéneas, las cuales podemos adicionar como vimos anteriormente:

$$\frac{2x^2+2x-40}{(x+5)(x-5)}+\frac{x^2+6x}{(x+5)(x-5)}=\frac{2x^2+2x-40+x^2+6x}{(x+5)(x-5)}$$

$$\frac{2x^2+2x-40+x^2+6x}{(x+5)(x-5)}=\frac{3x^2+8x-40}{(x+5)(x-5)}$$

El polinomio que obtienes en el numerador es un trinomio cuadrático. Para factorizarlo debes multiplicar por 3 el numerador y el denominador, obteniendo la siguiente fracción:

$$\frac{3(3x)^2+8(3x)-120}{3(x+5)(x-5)}$$

Como no hay dos enteros cuyo producto sea -120 y cuya suma sea 8, no es posible factorizar este trinomio, y la que obtuviste es la forma más simplificada de la suma.

Desempeño: Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 77 04/09/2023 11:58:38

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Soluciona las siguientes adiciones o sustracciones:

a. $\frac{3x^2 - 2x + 1}{x} + \frac{x^4 - 4x^2 + 5}{x - 2}$

b. $\frac{8x^3 + 5x}{x + 3} - \frac{7x^4 - 2x^2}{x^2 + 6x + 9}$

c. $\frac{x + 8}{x} + \frac{2x^2 + 1}{x^3} + \frac{3 - x^2}{x^2}$

Solución de problemas

2. La siguiente tabla muestra las expresiones racionales que representan la cantidad de refrescos que producen cuatro máquinas diferentes. Observa con atención la información, luego, responde cada pregunta.

Máquina N°	1	2	3	4
Cantidad de refrescos	$\frac{x^3 - 2}{x + 8}$	$\frac{x^2 - 3}{x - 8}$	$\frac{x + 5}{x + 8}$	$\frac{x^2 - 5x}{x + 8}$

a. ¿Cuál es el total de refrescos que producen las máquinas 1 y 2?

b. ¿Cuál es el total de refrescos que producen las máquinas 3 y 4?

c. ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de refrescos que producen las máquinas 1 y 2 y la cantidad de refrescos que producen las máquinas 3 y 4?

d. ¿Cuál es la diferencia entre las máquinas 1 y 2?

e. ¿Cuál es la diferencia entre las máquinas 3 y 4?

f. Calcula la diferencia entre las máquinas 4 y 3. Luego compara el resultado con el obtenido en el literal **e.**

g. ¿Las diferencias son iguales? Justifica tu respuesta.

3. La tabla muestra los tiempos y cantidades de producción de cuatro fábricas diferentes de colchones. Sus dueños quieren encontrar algunos datos característicos entre ellas. Analiza cada expresión, luego, contesta las preguntas.

Fábrica N.°	Tiempo de producción	Cantidad de producción
1	$\frac{x^2 + 5x - 24}{x - 2}$	$\frac{x^2 - 64}{x^2 + 8x + 15}$
2	$\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4}$	$\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 25}$
3	$\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - x - 2}$	$\frac{x^2 + 16x + 64}{x^2 + 10x + 25}$
4	$\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + 3x + 2}$	$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 10x + 25}$

a. ¿Cuál es la diferencia entre los tiempos de producción de la fábrica 1 y la fábrica 2?

b. ¿Cuál es la diferencia entre la producción de la fábrica 3 y la fábrica 4?

4. ¿Cuál es el total de la producción entre las cuatro fábricas?

a. Si se beben tres tazas de leche (250 cc) de una caja de 1,5 litros, y suponiendo que está al máximo de su capacidad, ¿cuánta leche queda en la caja?

b. Ángela y Roberto tienen un cuaderno de 120 hojas. Ángela ha gastado dos terceras partes del suyo y Roberto, tres quintas partes. ¿Cuántas hojas ha gastado cada uno? ¿A quién le quedan más hojas en blanco?

c. En una bandeja de cubitos de hielo Andrea ha preparado helados. Invita a sus amigos y se beben la mitad de la bandeja. En la cena ella se toma 1/3 de los que le quedaban y guarda en el refrigerador los 6 que han sobrado. ¿Cuántos helados preparó Andrea?

Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 78 04/09/2023 11:58:42

Componente: Numérico-variacional

Operaciones multiplicativas entre expresiones racionales

Aprendo

Multiplicación

Para **multiplicar dos o más expresiones racionales** se realiza un procedimiento similar a la multiplicación de números racionales, es decir, la multiplicación entre los numeradores genera el numerador del producto y la multiplicación de los denominadores genera el denominador de dicha multiplicación.

Ejemplo

Al solucionar la multiplicación: $\frac{x^2+x-2}{x-7}\times\frac{x^2-14x+49}{x^2-5x-14}$ tienes:

- $\frac{x^2+x-2}{x-7}$ Factorizando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

  $=\frac{(x+2)(x-1)}{x-7}$ para $x \neq 7$

- $\frac{x^2-14x+49}{x^2-5x-14}$ Factorizando el trinomio cuadrado perfecto y el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

  $=\frac{(x-7)^2}{(x+2)(x-7)}$ para $x \neq 7,\ x \neq -2$

Luego multiplicas los numeradores y los denominadores entre sí, respectivamente, simplificando al final lo que sea posible, teniendo en cuenta las indeterminaciones.

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x-7}\times\frac{(x-7)^2}{(x+2)(x-7)}=\frac{(x+2)(x-1)(x-7)^2}{(x-7)(x+2)(x-7)}=x-1 \text{ para } x\neq 7 \text{ y } x\neq -2$$

División

Para **dividir dos expresiones racionales** se realiza un procedimiento similar a la división de números racionales, es decir, se multiplica el numerador de la primera expresión por el denominador de la segunda expresión, lo cual genera el numerador del cociente. Por otra parte, se multiplica el denominador de la primera expresión por el numerador de la segunda expresión, lo que genera el denominador del cociente. A este procedimiento se le conoce como **multiplicación en cruz**.

Ejemplo

Para hallar el cociente entre $x^2-16x+64$ y x^2+8x primero factorizas las dos expresiones, así:

- $x^2-16x+64=(x-8)^2$
- $x^2-8x=x(x-8)$

Luego, simplificas en lo posible, teniendo en cuenta las indeterminaciones:

$$\frac{x^2-16x+64}{x^2-8x}=\frac{(x-8)^2}{x(x-8)}=\frac{x-8}{x} \text{ para } x\neq 8 \text{ y } x\neq 0$$

Desempeño: Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 79 04/09/2023 11:58:44

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Multiplica las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\frac{2b^3}{2a^3} \cdot \frac{5a^4}{3b^2}$

b. $\frac{a+b}{ab+b^2} \cdot \frac{b}{a+2}$

c. $\frac{x^2+5x+6}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{x+3}$

d. $\frac{5x^3}{7y^3} \cdot \frac{5y^2}{3z^2} \cdot \frac{6z}{10x}$

e. $\frac{5a+25}{14} \cdot \frac{7a+7}{15a+75}$

f. $\frac{mn-2n^2}{m^2+mn} \cdot \frac{m^2+2mn+n^2}{m^2-2mn}$

2. Divide las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\frac{a^2}{3y^2} \div \frac{2a}{y^2}$

b. $\frac{6a^2b}{5a^2} \div a^2b^3$

c. $\frac{15y^2}{10xy^3} \div \frac{20y^2}{5x^2y^2}$

d. $\frac{2x+y}{x+y} \div \frac{2x+y}{y}$

e. $\frac{1}{m+1} \div \frac{m^2+1}{m^2-1}$

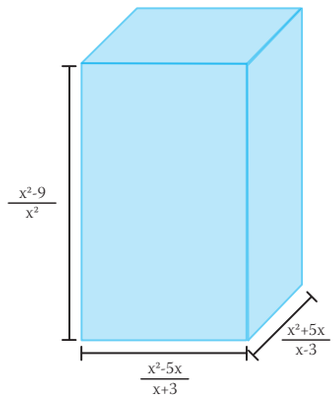
f. $\frac{a^2+3a+2}{a+3} \div \frac{a^2+4a+3}{a+4}$

Solución de problemas

3. Halla el volumen de los siguientes prismas rectangulares:

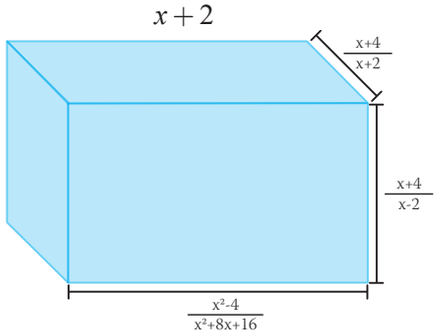
a. Ancho: $\frac{x^2-5x}{x+3}$ Alto: $\frac{x^2-9}{x^2}$

Profundo: $\frac{x^2+5x}{x-3}$



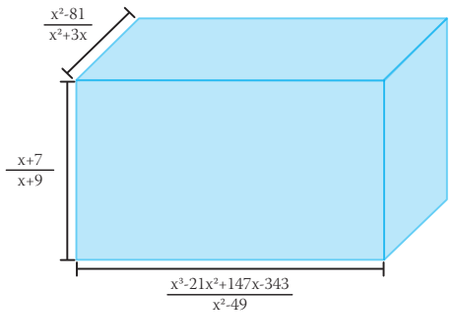
b. Ancho: $\frac{x^2-4}{x^2+8x+16}$ Alto: $\frac{x+4}{x-2}$

Profundo: $\frac{x+4}{x+2}$



c. Ancho: $\frac{x^3-21x^2+147x-343}{x^2-49}$

Alto: $\frac{x+7}{x+9}$ Profundo: $\frac{x^2-81}{x^2+3x}$



Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 80 04/09/2023 11:58:50

Componente: Numérico-variacional

Expresiones racionales compuestas

Aprendo

Las **expresiones racionales compuestas** son aquellas cuyo numerador y/o denominador son a su vez expresiones racionales.

Para simplificar las expresiones racionales compuestas se debe aplicar la ley de extremos y medios

Ejemplo

Al hallar el cociente entre las siguientes expresiones: $\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+3}{x-2}$ y $\frac{x+3}{x+2}$

Primero representa la división con una expresión racional compuesta, así: $\dfrac{\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+3}{x-2}}{\frac{x+3}{x+2}}$

Luego, efectúa la sustracción que tenemos en el numerador:

$$\frac{\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+3}{x-2}}{\frac{x+3}{x+2}}=\frac{\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}-\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}}{\frac{x+3}{x+2}}$$

Amplificando las expresiones para que sean homogéneas.

$$\frac{\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}-\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}}{\frac{x+3}{x+2}}=\frac{\frac{x^2+x-6-x^2-5x-6}{(x-2)(x+2)}}{\frac{x+3}{x+2}}$$

Resolviendo y simplificando.

$$\frac{\frac{x^2+x-6-x^2-5x-6}{(x-2)(x+2)}}{\frac{x+3}{x+2}}=\frac{\frac{-4x-12}{(x-2)(x+2)}}{\frac{x+3}{x+2}}$$

Operando términos semejantes.

$$\frac{\frac{-4x-12}{(x-2)(x+2)}}{\frac{x+3}{x+2}}=\frac{\frac{-4(x+3)}{(x-2)(x+2)}}{\frac{x+3}{x+2}}$$

Se saca como factor común –4.

$$\frac{\frac{-4(x+3)}{(x-2)(x+2)}}{\frac{x+3}{x+2}}=\frac{(-4)(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+3)}$$

Se aplica ley de extremos y medios.

$$\frac{(-4)\cancel{(x+3)}\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}\cancel{(x+3)}}=\frac{-4}{x-2}$$

Simplificando factores comunes.

De esta forma, obtienes que: $\dfrac{\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+3}{x-2}}{\frac{x+3}{x+2}}=\frac{-4}{x-2}$ para $x\neq\pm2$ y $x\neq-3$

Desempeño: Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 81 04/09/2023 11:58:54

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Representa como una expresión racional las siguientes expresiones racionales compuestas:

a. $\dfrac{\dfrac{x-8}{x-2}\times\dfrac{x+3}{x}}{\dfrac{x+3}{x^2}\div\dfrac{x-2}{x+1}}$

b. $\dfrac{\dfrac{x+5}{x+3}\times\dfrac{x+8}{x+2}\div\dfrac{x+1}{x-2}}{\dfrac{x+5}{x-1}\div\dfrac{x+2}{x+3}\times\dfrac{x-2}{x+1}}$

c. $\dfrac{\dfrac{x-5}{x+3}-\dfrac{x-3}{x+5}}{\dfrac{x-3}{x-5}\div\dfrac{x+5}{x+3}}$

d. $\dfrac{\dfrac{x+9}{x}+\dfrac{3x+5}{x^2}+\dfrac{2x+6}{x}}{\dfrac{x+8}{x^3}}$

e. $\dfrac{\dfrac{x+8}{x+2}+\dfrac{5x-2}{x+1}}{\dfrac{x-9}{x-2}\times\dfrac{x+8}{x}}$

f. $\dfrac{\dfrac{x}{x-2}\cdot\dfrac{x}{x+2}}{\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^2}$

Razonamiento

2. Escribe (V) si las siguientes afirmaciones son verdaderas o (F) si son falsas. Justifica cada respuesta.

a. Al simplificar las expresiones racionales compuestas el resultado es igual si realizamos $\dfrac{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}{\dfrac{R(x)}{S(x)}}$ que si realizamos $\dfrac{\dfrac{R(x)}{S(x)}}{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$.

b. Las expresiones racionales son otra representación de la adición de expresiones racionales.

c. Al simplificar las expresiones racionales se deben tener en cuenta las indeterminaciones correspondientes por si desaparece algún factor en el resultado final.

d. Las indeterminaciones de una expresión racional compuesta solo se encuentran en la expresión del denominador.

e. Las indeterminaciones de una expresión racional compuesta se encuentran tanto en las expresiones del numerador como en las del denominador.

Solución de problemas

3. Andrea quiere encontrar el cociente entre la diferencia de los tiempos de producción de dos diferentes tipos de leche y el tiempo total que tardan en transportarla a su supermercado. Ayúdala a simplificar la expresión racional compuesta que representa la situación.

- Tiempo de producción del tipo #1 de leche: $\dfrac{x-5}{x+12}$
- Tiempo de producción del tipo #2 de leche: $\dfrac{2x-3}{x-12}$
- Tiempo de transporte hasta el supermercado: $\dfrac{1}{x^2-144}$

Expresión racional compuesta que representa el cociente entre la resta de los tiempos de producción y el tiempo de transporte hasta el supermercado: $\dfrac{\dfrac{x-5}{x+12}-\dfrac{2x-3}{x-12}}{\dfrac{1}{x^2-144}}$

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 82 04/09/2023 11:59:00

Componente: Numérico-variacional

Identidades y ecuaciones

Aprendo

Igualdades e identidades

Una **igualdad** es un enunciado que utiliza el signo = para indicar que dos expresiones representan un mismo concepto matemático. Las expresiones a cada lado del signo de igualdad se llaman **los miembros de la igualdad**.

Una igualdad puede ser una **identidad aritmética** si solamente contiene números relacionados mediante las operaciones y es cierta, o una **identidad algebraica** si contiene variables y se verifica para cualquier valor que se dé a las variables involucradas.

Ejemplo

Comprueba que $a + b = 2a - b$ NO es una identidad algebraica.

Solución

Si reemplazas a por 2 y b por 1 obtienes la igualdad aritmética $2 + 1 = 2 \times 2 - 1$, que es válida. Sin embargo, si reemplazas a por 3, y b por 1 obtienes $3 + 1 = 2 \times 3 - 1$, que no es cierta. Por lo tanto, como existe al menos un caso en que no se cumple la igualdad, la expresión dada no es una identidad algebraica.

Ecuaciones

Cuando una igualdad algebraica no es cierta para algún valor de las letras, pero para otros valores sí es cierta, se llama **ecuación**.

Una **solución** de una ecuación es un conjunto de valores que pueden tomar las variables de manera que al reemplazarlos se satisface la igualdad.

Algunas ecuaciones tienen más de una solución y es común que ecuaciones con varias variables tengan infinitas soluciones.

Ejemplo

- $4x + 10 = 2x + 12$
  $4x = 2x + 12 - 10$
  $4x - 2x = 12 - 10$
  $2x = 2$
  $x = \frac{2}{2}$
  $x = 1$

- $4x - 8 = 12$
  $4x = 12 + 8$
  $4x = 20$
  $x = \frac{20}{4}$
  $x = 5$

- $24 + 2x = 30$
  $2x = 30 - 24$
  $2x = 6$
  $x = \frac{6}{2}$
  $x = 3$

Desempeño: Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 83 04/09/2023 11:59:01

Aplico mis conocimientos

Razonamiento

1. Identifica cuáles de las siguientes igualdades son aritméticas y cuáles son algebraica:

a. $9+2^2=\sqrt{25}+8$
b. $7x=56$
c. $3x+2y=6-3m$
d. $\frac{1}{5}+4=\frac{16}{5}+1$
e. $x^2-1=(x-1)(x+1)$
f. $-5+(20)=21-6$

2. Asigna diferentes valores a x y y para determinar si se cumple la identidad.

a. $(x-4)^2=x^2-4^2$
b. $4(x+3)=2(x+7)$
c. $5(9x+6)+5x=50x+30$
d. $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
e. $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
f. $5(4x-7)+2=20x-33$

3. Resuelve las operaciones en cada miembro de la igualdad y escribe si se trata de una identidad o de una ecuación.

a. $6x+3=9$
b. $2(8x-7)=16x-2(8)+2$
c. $7(4x+4)+8=28x+36$
d. $4x+3=2x+7$
e. $\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(3-x)$
f. $5(2x-3)=5x-15$

4. Une cada ecuación con el valor de x que la hace cierta.

Ecuación	Valor de x
a. $x+94=300$	**I.** 98
b. $9x+4=40$	**II.** 1
c. $x-46=52$	**III.** 206
d. $3x+2=5$	**IV.** 14
e. $x-(-13)=27$	**V.** 4

Comunicación

5. Determina si cada enunciado es verdadero (V) o falso (F).

a. En la igualdad $2(x+4)+3x=5x+8$ el primer miembro es igual a $5x+4$. ☐

b. La expresión $x(x+2)=x^2+2x$ es una identidad, por lo tanto, es correcta para cualquier valor de x. ☐

c. La expresión $2(5x+9)=14x+18$ es una identidad. ☐

d. Si en cada miembro de la igualdad $x+2=x+2(3)-4$ se le multiplica -3, la igualdad se conserva. ☐

e. La expresión $5(2x+3)-5=x+10$ es una ecuación y su única respuesta es $x=0$. ☐

Solución de problemas

6. El perímetro de un rectángulo es 40 cm, se sabe que su base es el triple de su altura. La igualdad que representa la situación es $8x=40$. Responde:

a. ¿La igualdad que representa el perímetro es una identidad?

b. ¿Con qué valores de x es cierta la igualdad?

Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 84 04/09/2023 11:59:04

Componente: Numérico-variacional

Ecuaciones equivalentes

Aprendo

Dos **ecuaciones** son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones. Esto es, cualquier solución de la primera es también solución de la segunda y viceversa.

Ejemplo

Obtener una ecuación equivalente a $x+2=5$ por medio de una multiplicación.

Si multiplicas ambos lados por un mismo número encontrarás ecuaciones equivalentes. Multiplicando por 7:

$$7(x+2)=7(5)$$
$$7x+14=35$$

Observa que las dos ecuaciones tienen por solución 3:

$$x+2=5 \qquad 7x+14=35$$
$$3+2=5 \qquad 7(3)+14=35$$
$$5=5 \qquad 21+14=35$$

Ejemplo

Halla dos ecuaciones equivalentes a la siguiente ecuación:

$5x-7=3x+2$	
Sumando 7 a los dos miembros	Restando 3x en ambos miembros
$5x-7+7=3x+2+7$ $5x=3x+9$	$5x-7-3x=3x+2-3x$ $2x-7=2$

Ejemplo

Halla una ecuación equivalente a $-4x+6=10$ de forma que el coeficiente del término que contiene la incógnita sea 1.

$\frac{-4x+6}{-4}=\frac{10}{-4}$ Dividiendo ambos miembros de la igualdad entre -4

$\frac{-4x}{-4}+\frac{6}{-4}=\frac{10}{-4}$ Separando las fracciones del primer miembro

$x-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$ Simplificando

Ideas clave...

Al sumar términos semejantes, sus coeficientes se suman, pero su parte literal queda inalterada.

Desempeño: Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 85 04/09/2023 11:59:06

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Teniendo en cuenta las propiedades de la igualdad, identifica qué operación se aplicó a la ecuación para obtener la ecuación equivalente.

Ecuación inicial	Ecuación equivalente
a. $15x^3 - 50x = 25$	$3x^3 - 10x = 5$
b. $6x - 7 = 13$	$6x - 5 = 15$
c. $x + 8 = -4$	$3x + 24 = -12$
d. $9x + 8 = 14$	$9x + 4 = 10$

2. Sigue los pasos que se indican para hallar una ecuación equivalente a $\frac{x}{2} - 7 = \frac{1}{2}$ y resolverla.

Ecuación	Pasos
$\frac{x}{2} - 7 = \frac{1}{2}$	Suma 7 en ambos miembros de la igualdad. Multiplica por 2. Simplifica.

3. Une con una línea las parejas de ecuaciones que son equivalentes.

a. $-9x - 10 = -4x$	I. $-2x = -4x + 10$
b. $-x - 1 = -2x + 5 - 1$	II. $-2 - 4x = 10 - x$
c. $-2x - 4 = 10$	III. $-2x = 14$
d. $x - 4x = 12$	IV. $x + 10 = -4x$

4. Para cada ecuación halla una ecuación equivalente aplicando las operaciones que se indican.

Ecuación	Operación
a. $3x - 4 = 7 - 5x$	Suma $-5x$
b. $9x + 2 = 14$	Dividir entre 9

Solución de problemas

5. Escribe falso (F) o verdadero (V) según corresponda.

a. Puedo crear una ecuación equivalente a otra si divido entre un mismo número distinto de cero el miembro derecho de la igualdad.

b. Dos ecuaciones equivalentes tienen exactamente las mismas soluciones.

c. Para una ecuación cualquiera existe una única ecuación equivalente.

d. La ecuación $8 - x = 6$ es equivalente a la ecuación $x = 14$.

e. La ecuación $x^2 - 3 = 6$ es equivalente a $2x^2 - 6 = 12$.

6. Explica por qué al multiplicar por 0 a ambos lados de una ecuación no se obtiene una ecuación equivalente.

7. Utiliza ecuaciones equivalentes para explicar por qué los siguientes enunciados contienen la misma información:

a. Cuando Andrés tenga la edad de Fabián, Fabián tendrá el doble de la edad que tiene Andrés.

b. El doble de la edad de Fabián es igual al triple de la edad de Andrés.

8. Utiliza ecuaciones equivalentes para explicar por qué los siguientes enunciados contienen la misma información:

a. Si Camilo le diera Q. 20.00 a Jaime, ambos tendrían la misma cantidad de dinero.

b. Camilo tiene Q.40.00 más que Jaime.

9. Utiliza ecuaciones equivalentes para explicar por qué los siguientes enunciados contienen la misma información:

a. El total de juguetes que tienen entre Héctor, Francisco y Nicolás es igual al doble de la cantidad de juguetes que tiene Francisco.

b. Francisco tiene tantos juguetes como Héctor y Nicolás juntos.

Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 86 04/09/2023 11:59:08

Componente: Numérico-variacional

Ecuaciones con una incógnita

Aprendo

Solución de ecuaciones

Una **ecuación con una incógnita** es una igualdad en la que solo aparece una variable. La variable puede aparecer más de una vez en la ecuación.

Las ecuaciones se solucionan por medio de las **propiedades de regularidad** de las ecuaciones y simplificaciones. Para esto, se deben aplicar operaciones a ambos lados de la igualdad que cancelen aquellas operaciones que se están efectuando sobre la variable. Este proceso se denomina **despeje**.

Ejemplo

Halla la solución de las siguientes ecuaciones:

- $n - 33 = 25$
- $33 - m = 25$
- $12k = 192$

Solución

- En la primera ecuación, a la variable se le está restando 33. Por lo tanto, para realizar el despeje, debes sumar 33 en ambos lados de la igualdad. Así, obtienes que $n - 33 + 33 = 25 + 33$, y al cancelar las operaciones inversas hallas que $n = 58$.

  Puedes verificar que la solución es correcta, pues $58 - 33 = 25$.

- En la segunda ecuación se le está restando m a 33. Si se sumara 33 en ambos lados de la igualdad se obtendría que $33 - m + 33 = 25 + 33$ en donde no se cancelan las operaciones. Así, debes aplicar una secuencia diferente de operaciones para realizar este despeje.

$33 - m = 25$	
$33 - m + m = 25 + m$	Sumando a ambos lados de la igualdad m
$33 = 25 + m$	Cancelando las operaciones inversas
$33 - 25 = 25 + m - 25$	Restando 25 en ambos miembros
$8 = m$	Operando y cancelando las operaciones inversas

  Observa que el resultado es diferente al de la ecuación anterior aun cuando las ecuaciones son similares.

- Al reemplazar la solución en la ecuación original obtienes una igualdad válida: $33 - 8 = 25$.

  En la tercera ecuación la variable está siendo multiplicada por 12, y se debe entonces dividir entre 12 en ambos lados de la igualdad.

$12k = 192$	
$\frac{12k}{12} = \frac{192}{12}$	Dividiendo entre 12 ambos lados de la igualdad.
$k = 16$	Operando y cancelando las operaciones inversas.

Puedes verificar que la solución es correcta pues $12 \times 16 = 192$

Desempeño: Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 87 04/09/2023 11:59:08

Orden de operaciones

Para resolver una ecuación con **signos de agrupación**, primero se deben eliminar estos teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones indicadas.

Cuando una ecuación tiene la incógnita en más de un término, se reducen términos semejantes hasta obtener una ecuación con la incógnita en un solo término.

Para cancelar una operación que se esté aplicando, se debe respetar la jerarquía de las operaciones:

1. Primero, se hacen las operaciones entre paréntesis, corchetes y llaves.
2. Segundo, se calculan las potencias y raíces.
3. Tercero, se resuelven los productos y cocientes.
4. Por último, se hacen las sumas y restas.

Las operaciones inversas se deben hacer en el orden opuesto.

Ejemplo

Determina el valor de H para el cual es válida la siguiente ecuación: $\frac{120}{H} - 11 = 4$

Solución

En la ecuación hay dos operaciones efectuadas: una resta y una división. La resta toma prioridad para efectuar la operación inversa, de modo que, se suma 11 en ambos lados de la igualdad.

$\frac{120}{H} - 11 + 11 = 4 + 11$	Sumando 11 a ambos lados
$\frac{120}{H} = 15$	Cancelando y operando
$\left(\frac{120}{H}\right) \times H = 15 \times H$	Multiplicando por H a ambos lados
$120 = 15H$	Cancelando y operando
$\frac{120}{15} = \frac{15H}{15}$	Dividiendo entre 15 ambos miembros
$8 = H$	Operando y cancelando

Ejemplo

Resolver la ecuación $5x = 8x - 15$.

Solución

$5x - 8x = 8x - 8x - 15$	Restando $8x$ en ambos lados de la igualdad
$-3x = 0 - 15$	Reduciendo términos semejantes
$-3x = -15$	
$\frac{-3}{-3}x = \frac{-15}{-3}$	Dividiendo entre –3 ambos miembros
$x = 5$	Operando

Utiliza los números reales (sus operaciones, relaciones y propiedades) para resolver problemas con expresiones polinómicas.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 88 04/09/2023 11:59:08

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Expresa la ecuación como ecuación lineal de la forma $ax+b=0$.

a. $\frac{2x-1}{3}-\frac{x+13}{24}=3x+\frac{5(x+1)}{8}$
b. $21-6x=27-8x$
c. $-2x-3=x-15$
d. $3x-5=x+3$
e. $35-22x+6-18x=14-30x+32$
f. $x+3(x-1)=6-4(2x+3)$

2. Resuelve las ecuaciones reduciendo los términos semejantes.

a. $8x-4+3x=7x+x+14$
b. $21-6x=27-8x$
c. $x-5=3x-25$
d. $16+7x-5+x=11x-3-x$
e. $9x-11=-10+12x$
f. $4x+1=2$

3. Halla la solución de las siguientes ecuaciones suprimiendo signos de agrupación.

a. $(3x-4)(4x-3)=(6x-4)(2x-5)$
b. $(x-2)^2-(3-x)^2=1$
c. $3(5x-6)=6(3x+4)$
d. $30x-(-x+6)=(5x+6)$
e. $2x-6+(3+7x)=14$
f. $9x-(5x+1)+3x=0$

4. Determina el valor de x que hace cierta la ecuación.

a. $\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x$
b. $\frac{x-4}{3}-5=0$
c. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}x=\frac{1}{5}$
d. $x-\frac{x+2}{12}=\frac{5x}{2}$
e. $\frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}=\frac{x}{6}-\frac{5}{4}$
f. $10x-\frac{8x-3}{4}=2(x-3)$

5. Une la ecuación con la solución correspondiente.

Ecuación	Solución
a. $2x+7=9-(x+2)$	I. $x=4$
b. $8x+9(2+x)=-33$	II. $x=\frac{1}{2}$
c. $\frac{1}{2}x+3=5$	III. $x=-3$
d. $7-6x=4$	IV. $x=0$

6. Determina para cada afirmación si es verdadera (V) o falsa (F) y justifica tu respuesta.

a. La solución a la ecuación $12-x=14$ es $x=2$. ☐

b. Para resolver la ecuación $4m=1024$ se debe dividir entre 4 a ambos lados de la igualdad. ☐

c. La solución de la ecuación $\frac{60}{f}=12$ es $f=5$. ☐

d. Para resolver la ecuación $5m+8=25$ se debe primero dividir entre 5 a ambos lados. ☐

e. La solución de la ecuación $\frac{5}{n}-1=6$ es $n=35$. ☐

Desempeño: Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 89 04/09/2023 11:59:10

Componente: Numérico-variacional

Planteamiento y resolución de ecuaciones

Aprendo

Para resolver problemas por medio de ecuaciones, resulta conveniente seguir unos pasos:

Paso 1: el número desconocido se nombra por medio de una variable que se simboliza con una letra.

Paso 2: se traduce el enunciado en lenguaje algebraico.

Paso 3: se resuelve la ecuación.

Paso 4: se comprueba la solución reemplazando el valor en la ecuación.

Paso 5: se da a conocer la respuesta según el contexto del problema.

Ejemplo

Los hermanos Mario y Luis tienen respectivamente 4 y 14 años de edad. ¿Cuántos años deben pasar para que la edad de Luis sea exactamente el doble de la edad de Mario?

Solución

Paso 1: sea k la cantidad de años que van a pasar para que ocurra esta situación.

Paso 2: la edad de Mario en k años será $4 + k$. La edad de Luis será $14 + k$. La relación expresada por el problema es $14 + k = 2(4 + k)$.

Paso 3: para resolver el problema debes utilizar inicialmente la propiedad distributiva.

$14 + k = 2(4 + k)$	
$14 + k = 8 + 2k$	Aplicando la propiedad distributiva
$14 + k - 8 = 8 + 2k - 8$	Restando 8 a cada lado de la igualdad
$6 + k = 2k$	Operando
$6 + k - k = 2k - k$	Restando k a ambos miembros de la igualdad
$6 = k$	Simplificando y operando

Paso 4: al reemplazar en la ecuación inicial se obtiene la siguiente igualdad:

$$14 + 6 = 2(4 + 6)$$

$$20 = 2 \times 10$$

Como esta última igualdad es válida, la solución encontrada es correcta.

Dentro de seis años la edad de Luis será el doble que la de Mario. Tendrán 20 y 10 años, respectivamente.

Utiliza los números reales (sus operaciones, relaciones y propiedades) para resolver problemas con expresiones polinómicas.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 90 04/09/2023 11:59:10

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

Para cada problema establece una ecuación y soluciónala.

1. Luis planea incursionar en una industria pastelera y va a abrir una tienda en un centro comercial. Él ha realizado una cotización de unos estantes, que requiere para su negocio, y le han dicho que cada estante cuesta Q. 1200.00. Los gastos de vitrinas son Q. 2300.00 y el total de la factura es Q. 6800.00.

   Determina: ¿cuántos estantes piensa poner Luis?

2. El perímetro de un rectángulo es 16. Se sabe que su base es la tercera parte de su altura. Responde:
   - **a.** ¿Con qué valor o valores de x es cierta la igualdad?
   - **b.** ¿La igualdad que representa el perímetro es una identidad?

3. Susana solucionó un problema, su profesor le indica que la ecuación está mal planteada. Observa el procedimiento y responde:

   Un número disminuido en $\frac{5}{4}$ equivale a su duplo disminuido en 7. ¿Cuál es el número?
   La ecuación que representa la situación es:

   $$x - \frac{5}{4} = 2\left(\frac{5}{4}\right) - 7$$

   ¿Cuál fue el error cometido por Susana al plantear la ecuación?

Solución de problemas

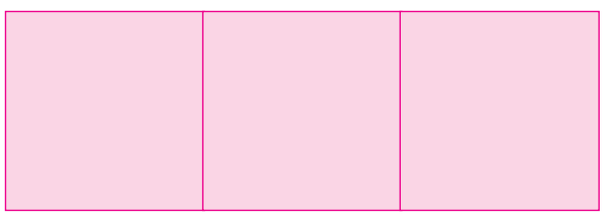
4. En una empresa de derivados del alcohol, requieren mezclas con diferentes concentraciones de esta sustancia. Para ello, mezclan en ocasiones alcohol puro con agua, o en ocasiones, añaden alcohol o agua a una mezcla ya lista.
   - **a.** Determina la cantidad de alcohol que se debe añadir a 26 galones de agua para que la mezcla resultante tenga una concentración de 60 % de alcohol.
   - **b.** Determina la cantidad de agua que se debe mezclar con 45 galones de alcohol para que el resultado tenga una concentración de 9 % de alcohol.
   - **c.** Determina la cantidad de agua que se debe añadir a 60 galones de mezcla que tiene concentración de 25 % de alcohol para que el resultado sea una mezcla con 10 % de alcohol.

5. El costo de un taxi en Guatemala está dado por 7d + Q. 17.50, donde d es la distancia recorrida en kilómetros. Si Camilo tiene Q. 100.00, ¿qué distancia puede recorrer en el taxi?

6. Un avión parte desde la ciudad de Medellín hacia el norte, a una velocidad de 600 km/h. Una hora después, otro avión parte de la misma ciudad hacia el sur a una velocidad de 650 km/h. ¿Cuánto tiempo pasa desde el despegue del primer avión para que la distancia entre los aviones sea de 3 100 km?

7. Sandra invierte dinero en un banco, dando un capital de Q. 2, 500.00. Cada mes su dinero aumenta en Q. 200.00. Determina cuántos años pasan para que Sandra tenga un ahorro de Q. 10, 000.00.

8. El siguiente rectángulo está hecho de tres cuadrados iguales y tiene perímetro igual a 632 cm. Halla la medida del lado de un cuadrado y el área del rectángulo.



Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 91 04/09/2023 11:59:10

Componente: Numérico-variacional

Desigualdades e inecuaciones lineales

Aprendo

Propiedades

Si $a < b$ y $b <$ c entonces se concluye que $a < c$.

Si a una **desigualdad** le sumamos o restamos un mismo valor en ambos lados, entonces la desigualdad se mantiene. $a < b$ y $a + c < b + c$.

Si a una desigualdad le multiplicamos o dividimos un mismo número racional positivo en ambos lados, entonces la desigualdad se mantiene. $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.

Si a una desigualdad le multiplicamos o dividimos un mismo número racional negativo en ambos lados, entonces la desigualdad cambia de sentido. $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

Ejemplo

Resolver la inecuación $6m - 1 \geq 3m + 62$

Solución

$6m - 1 \geq 3m + 62$	
$6m - 1 + 1 \geq 3m + 62 + 1$	Sumando 1 a ambos lados de la inecuación
$6m \geq 3m + 63$	Operando y cancelando
$6m - 3m \geq 3m + 63 - 3m$	Restando 3m en ambos lados
$3m \geq 63$	Simplificando y cancelando
$\frac{3m}{3} \geq \frac{63}{3}$	Dividiendo entre 3
$m \geq 21$	Se obtiene la solución

Interpretación gráfica de inecuaciones lineales

La solución de una **inecuación lineal** en dos variables es un **área en el plano cartesiano**. Para determinar la región de parejas que satisfacen la desigualdad, sigues estos pasos:

Paso 1: se plantea en lugar de una inecuación, una igualdad. Para esto se cambia el signo <, >, ≤ o ≥ por el signo =.

Paso 2: se identifican dos soluciones de la ecuación. Esto es, dos parejas ordenadas que cumplan la igualdad.

Paso 3: se grafican estas dos soluciones en el plano cartesiano y se traza una recta a través de estos dos puntos. Si la desigualdad es ≤ o ≥ esta línea es continua, de lo contrario es punteada. La región solución estará delimitada por esta recta.

Paso 4: se selecciona un punto que no esté sobre la recta y se verifica si cumple o no la desigualdad. Si cumple la desigualdad, la región solución es la que incluye al punto.

Paso 5: en la gráfica se pueden identificar puntos que se encuentren en la región y que cumplen con la desigualdad. Si la línea es punteada, el concepto es análogo al círculo sin rellenar en las desigualdades: no se incluyen los puntos sobre esta recta.

Utiliza los números reales (sus operaciones, relaciones y propiedades) para resolver problemas con expresiones polinómicas.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 92 04/09/2023 11:59:18

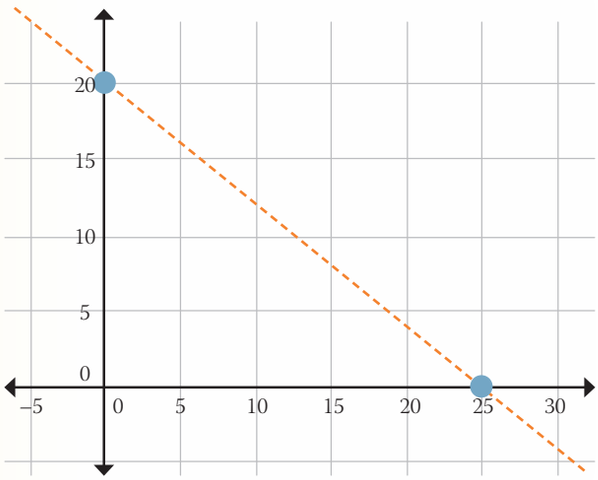
Ejemplo

La inecuación que debes resolver es $12x + 15y < 300$.

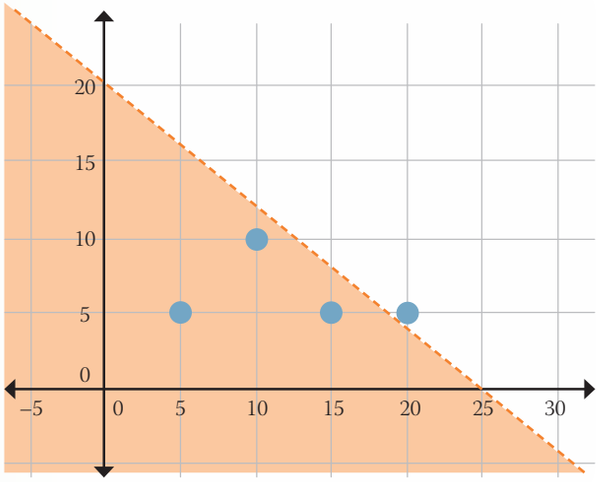
Paso 1: intercambia el signo < por =, de modo que tienes la ecuación $12x + 15y = 300$.

Paso 2: para identificar posibles soluciones de la ecuación, puedes tomar valores diferentes de x o y. Por ejemplo, si $x = 0$, la ecuación se transforma en $15y = 300$, cuya solución es $y = 20$. Similarmente, si tomas $y = 0$ obtienes la ecuación $12x = 300$, cuya solución es $x = 25$. Por lo tanto, tienes dos soluciones a la ecuación, que son (0, 20) y (25, 0). Existen otras soluciones, pero con dos es suficiente.

Paso 3: Coloca los puntos sobre el plano cartesiano y dibuja la recta correspondiente. Como la desigualdad es estricta (<), la línea es punteada.



Paso 4: Observa que el punto con coordenadas (5,5) no está sobre la recta. Reemplazando estos valores en la inecuación se obtiene que $12 \times 5 + 15 \times 5 < 300$; esto es $135 < 300$ que es una desigualdad cierta. Por lo tanto, la región de puntos que cumplen las condiciones de la inecuación la puedes representar así:



Paso 5: Observa que en la región indicada se encuentra el punto con coordenadas (10, 10), también se encuentra el punto con coordenadas (15, 5). El punto con coordenadas (20, 5) no se encuentra en la región permitida.

Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 93 04/09/2023 11:59:18

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Escribe el signo <,> o = según corresponda:

a. $6-5-7 \square 3-6$

b. $5-(12\div 3)+6 \square (-7+8)\times 2$

c. $8+5 \square 10$

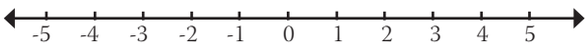
d. $3(4+9) \square 9+10$

e. $\frac{1}{2}-6-\left(-\frac{1}{2}\right) \square -4+2$

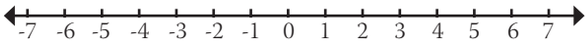
f. $10 \div 2 \square 1{,}2$

2. Representa en cada recta numérica el conjunto solución de cada inecuación.

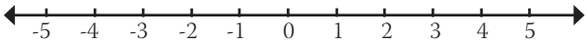
a. $x+2<3$



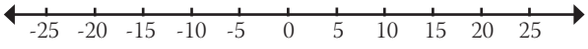
b. $x-5>2$



c. $-2x \leq 6$



d. $\frac{x}{5} \leq -4$



3. Resuelve cada inecuación y expresa el conjunto solución como intervalo.

a. $5x<3$

b. $5-3x>9$

c. $\frac{1}{5}x \leq 6+7$

d. $4-x \geq 12$

e. $-2x>-5$

f. $\frac{1}{4}+2x \geq -\frac{3}{7}$

g. $x-4<5$

h. $x+1<2(3+7)$

Razonamiento

4. Escribe falso (F) o verdadero (V) según corresponda, justifica tu respuesta.

a. Si $-3x>6$, entonces $x>\frac{6}{3}$ ☐

b. Si $x+5 \geq 3$, entonces $x+5-5 \leq 3-5$ ☐

c. Si $x<-4$, entonces $-4>x$ ☐

d. Si $2x \geq 10$, entonces -5 es un número que está en el conjunto solución. ☐

5. Elige la inecuación que representa la situación:

El doble del dinero de Claudia aumentado en Q 2,500.00 es máximo Q. 15,000.00.

a. $2x + 2{,}500 > 15{,}000$

b. $2x + 2{,}500 < 15{,}000$

c. $2x + 2{,}500 \geq 15{,}000$

d. $2x + 2{,}500 \leq 15{,}000$

6. Escribe una inecuación para cada expresión verbal.

a. La diferencia entre el triple de un número y 21 es menor que 54.

b. La quinta parte de un número aumentada en 18 es mayor que 26.

c. Dentro de seis años Jorge tendrá más de 14 años.

Solución de problemas

Escribe una inecuación para cada problema y luego resuélvela.

7. A Andrea, después de pagar 27 millones de su crédito de vivienda, le faltan menos de 12 millones por pagar. ¿En qué intervalo de números está lo que aún falta por pagar?

8. Si el doble de la edad de Lucrecia, aumentada en 5 es como mínimo 52, ¿cuál es la edad mínima que tiene actualmente Lucrecia?

9. Si un triángulo tiene una base de 12 cm y se quiere que tenga un área menor a 36 cm, ¿cuál es el intervalo de posibles alturas que puede tener el triángulo?

Utiliza los números reales (sus operaciones, relaciones y propiedades) para resolver problemas con expresiones polinómicas.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 94 04/09/2023 11:59:36

Componente: Métrico-geométrico

Áreas y perímetros

Aprendo

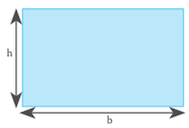
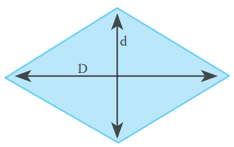
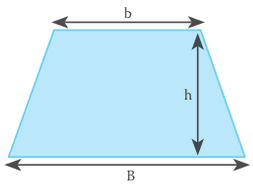
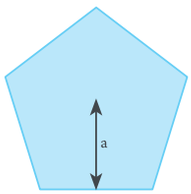
El **perímetro** de un polígono es la suma de la medida de cada uno de sus lados.

Perímetro y área de triángulos:

Perímetro	**Área**
Es la suma de la medida de sus tres lados $P = a + b + h$	El triángulo es la mitad de un cuadrilátero desde su diagonal. Luego el área es: $A = \frac{b \times n}{2}$ b = base n = altura

El **área** de un polígono es la medida de su superficie interior.

Fórmula del área de cuadriláteros y polígonos de más lados:

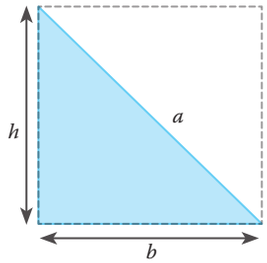
Cuadrado, Rectángulo, Paralelogramo.		$A = l^2$, si es cuadrado. $A = b \times h$, si es rectángulo o paralelogramo.
Rombo		D: diagonal mayor d: diagonal menor $A = \frac{D \times d}{2}$
Trapecio		B = Base mayor, b = base menor, h = Altura $A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \times h$
Polígono regular de 5 o más lados.		Para un polígono que tiene lados iguales el cálculo del área se da con ayuda del perímetro y de la apotema. $A = \frac{P \times a}{2}$

Desempeño: Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 95 04/09/2023 11:59:37

Ejemplo

Halla el perímetro del siguiente triángulo:



Halla el perímetro del triángulo, sumando la medida de sus tres lados:

$$P = a + b + h$$

Donde a y b son iguales, y cada uno mide 30 cm; h es la medida de la altura, que corresponde a 8 cm. Reemplazando en la fórmula:

$$P = a + b + h$$
$$P = 30\ cm + 30\ cm + 8\ cm$$
$$P = 68\ cm$$

Esto quiere decir, que el perímetro del triángulo es de 68 cm.

Halla el área de un triángulo que tiene las siguientes medidas:

Base = 4 cm.

Hipotenusa = 30 cm.

Altura= no la conocemos.

Halla la medida de la altura del triángulo, despejando la variable n en el teorema de Pitágoras:

$$(30\ cm)^2 = n^2 + (4\ cm)^2$$
$$(30\ cm)^2 - (4\ cm)^2 = n^2$$
$$900\ cm^2 - 16\ cm^2 = n^2$$
$$884\ cm^2 = n^2$$

Halla la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación:

$$29{,}7cm = n$$

Significa que la altura del triángulo es de 29,7 cm.

Con este dato puedes hallar el área del triángulo original:

$$A = \frac{b \times n}{2}$$

Donde $b = 8cm$ y $n = 29{,}7cm$

$$A = \frac{8cm \times 29{,}7cm}{2}$$

$$A = 118{,}8cm^2$$

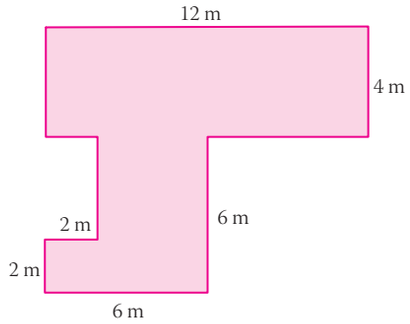
Entonces, el área del triángulo es de 118,8 cm^2

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 96 04/09/2023 11:59:37

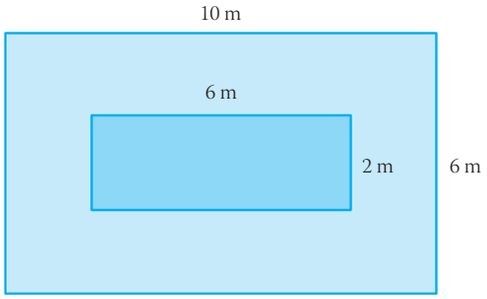
Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Halla el área de la siguiente figura:



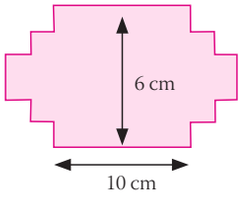
2. En el ejercicio anterior, la figura se parte en tres rectángulos y se suman las respectivas áreas. ¿Qué procedimiento harías en la siguiente figura? Desarróllalo en tu cuaderno.

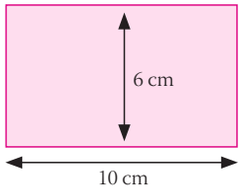


Solución de problemas

3. En un salón hay una caja con 19 piezas cuadradas y triangulares. Entre todas las piezas hay 70 lados, ¿cuántas piezas triangulares hay en la caja?

A partir de las siguientes figuras resuelve las preguntas de la 4 a la 6.





4. Halla el perímetro de cada figura:

Figura 1: _____ unidades.

Figura 2: _____ unidades.

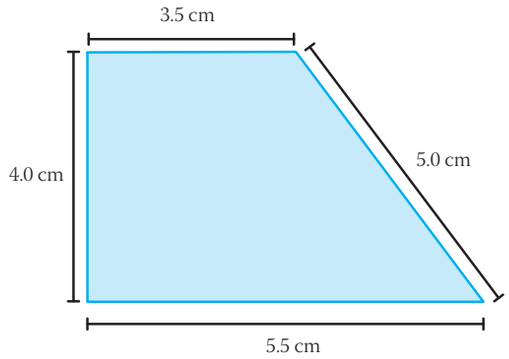
5. Halla el área de cada figura:

Figura 1: _____ unidades cuadradas.

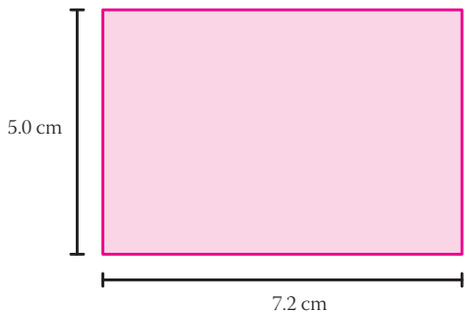
Figura 2: _____ unidades cuadradas.

6. ¿Qué relación hay entre el área y perímetro de las dos figuras?

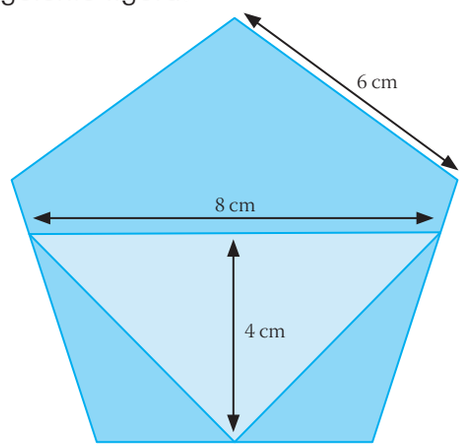
7. ¿Es posible dibujar una figura de igual perímetro y mayor área que la mostrada en la imagen?



8. ¿Es posible dibujar una figura de igual área y menor perímetro que la mostrada en la imagen?



9. Halla el área de la región sombreada en la siguiente figura:



Desempeño: Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 97 04/09/2023 11:59:37

Componente: : Aleatorio

Medidas de dispersión

Aprendo

Desviación media

La **desviación media** (Dx) es una medida de dispersión que se usa para verificar qué tan próximos están los datos de la media, por lo que se calculan las desviaciones respecto a esta, es decir, la diferencia entre cada dato y la media.

Ejemplo

En la siguiente tabla se registra el número de hermanos que tienen 6 trabajadores de la inmobiliaria Vivamos Bien:

Trabajador	Javier	María	Cristian	Daniela	Martha	Sebastián
Cantidad de hermanos	2	1	3	0	2	1

Para hallar la desviación media de los datos correspondientes a los hermanos de los trabajadores, se siguen los pasos:

1. Hallar la media $\bar{x} = \frac{2+1+3+0+2+1}{6}$

$\bar{x} = 1.5$

2. Hallar la desviación de cada dato respecto a la media $\rightarrow$ $Dato - Media$

3. Calcular los valores absolutos de cada desviación $\rightarrow$ $|Dato - Media|$

Trabajador	**Frecuencia absoluta n_i**	$Dato - Media$	$\lvert Dato - Media \rvert$
Javier	2	0.5	0.5
María	1	-0.5	0.5
Cristian	3	1.5	1.5
Daniela	0	-1.5	1.5
Martha	2	0.5	0.5
Sebastián	1	-0.5	0.5

4. Sumar los resultados y dividir entre el número total de datos.

$D_{\bar{x}} = \frac{0.5+0.5+1.5+1.5+0.5+0.5}{6}$

$D_{\bar{x}} = \frac{5}{6}$

$D_{\bar{x}} = 0.83$

Cuanto menor sea la desviación como se da en este caso (0.83) se tiene que los datos están menos dispersos y, por lo tanto, la media es representativa.

Hace predicciones sobre la posibilidad de ocurrencia de un evento compuesto e interpreta la predicción a partir del uso de propiedades básicas de la probabilidad.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 98 04/09/2023 11:59:38

Varianza

La **varianza** es la media aritmética del cuadrado de las desviaciones respecto a la media de una distribución estadística. Se simboliza s^2.

La raíz cuadrada de la varianza $\sqrt{s^2} = s$ corresponde a la desviación típica.

Ejemplo

Una empresa hace un estudio sobre la cantidad de asistentes con el fin de proyectar la asistencia a un evento y saber cuántas invitaciones enviar. Los datos se registraron en la siguiente tabla:

Año	2016	2017	2018	2019	2020
Cantidad de asistentes	2	1	3	0	2

Para hallar la varianza y la desviación típica, debes hacer los siguientes pasos:

1. Hallar la media $\bar{x} = \dfrac{28+25+30+20+23}{5}$

$$\bar{x} = 25.2$$

2. Hallar la desviación de cada dato respecto a la media $\rightarrow$ $Dato - Media$

3. Elevar al cuadrado las desviaciones $\rightarrow$ $(Dato - Media)^2$

Año	Frecuencia absoluta n_i	$Dato - Media$	$(Dato - Media)^2$
2016	28	2.8	7.84
2017	25	-0.2	0.04
2018	30	4.8	23.04
2019	20	-5.2	27.04
2020	23	-2.2	4.84

4. Hallar la varianza: sumar los cuadrados de las desviaciones y dividir entre el número total de datos.

$$s^2 = \frac{7.84+0.04+23.04+27.04+4.84}{5}$$

$$s^2 = \frac{62.8}{5}$$

$$s^2 = 12.56$$

La desviación típica corresponde a la raíz cuadrada de la varianza, por lo que se obtiene:

$$s = \sqrt{12.56}$$

$$s = 3.54$$

Desempeño: Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 99 04/09/2023 11:59:39

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. ¿Qué utilidad tienen la varianza y la desviación típica en un conjunto de datos?
2. ¿Por qué es necesario hallar la media aritmética para el cálculo de la desviación y la varianza?
3. ¿En qué casos se puede decir que la media es representativa del conjunto de datos?

Solución de problemas

4. Completa los espacios en blanco de la siguiente tabla. Recuerda que tales datos te permiten hallar la desviación media de un conjunto de datos. Determina una situación a la cual sea posible aplicar tal conjunto de datos.

Datos	Variable	$Dato - Media$	$Dato - Media$
1	10		2.2
2	8	0.2	
3	5		
4	7	–0.8	0.8
5	9		1.2

5. Completa los espacios en blanco de la siguiente tabla. Recuerda que tales datos te permiten hallar la varianza de un conjunto de datos. Determina una situación a la cual sea posible aplicar tal conjunto de datos.

$Dato$	$Variable$	$Dato - Media$	$(Dato - Media)^2$
1	8	–2	4
2	11		1
3	12	2	
4	10		0
5	9		

6. Halla la desviación media de los siguientes datos y determina una situación a la cual sea posible aplicar tal conjunto.

Mes	Personas
Septiembre	69
Octubre	78
Noviembre	68
Diciembre	60
Enero	80

7. Completa los espacios en blanco de la siguiente tabla como medio para hallar la varianza y la desviación típica del conjunto de datos.

$Variable$	Frecuencia absoluta n_i	$Dato - Media$	$(Dato - Media)^2$
1	4		
2	3	0	0
3	0		27
4	2	–1	
5	4		
6	5	2	4

8. Los siguientes datos corresponden a las estaturas de los integrantes de un grupo de amigos. Halla la desviación media.

1.56	1.49	1.69	1.63
1.72	1.65	1.80	1.70

9. La siguiente es la tabla de precios de venta flores en un supermercado de la ciudad:

Clase de flores	Precio por docenas
Girasol	Q. 50.00
Cartuchos	Q. 25.00
Rosas	Q. 28.00
Claveles	Q. 20.00
Gladiolos	Q. 30.00
Aves del paraíso	Q. 55.00

   a. ¿Cuál es el rango de variación de los precios de las docenas de flores?

   b. ¿Cuál es la varianza del conjunto de datos? ¿Qué significa?

Hace predicciones sobre la posibilidad de ocurrencia de un evento compuesto e interpreta la predicción a partir del uso de propiedades básicas de la probabilidad.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 100 04/09/2023 11:59:41



Educación Económica y Financiera (E.E.F.)

Planeación de presupuestos

Aprendo

Conceptos clave

Presupuesto: es la relación organizada y anticipada de los ingresos y egresos de una actividad económica, esta puede ser de una empresa, país, persona o cualquier entidad que desea planear la ejecución de dinero. El presupuesto está dado bajo condiciones, objetivos y metas cumplidas, en su totalidad se estiman para ciertos periodos de tiempo. Este, además, hace parte de la planeación y ejecución de una empresa cuya asignación se realiza para determinado periodo.

Para la construcción de un presupuesto se deben tener en cuenta las siguientes partes:

Se cree que para dar inicio a los procesos de presupuestario se debe partir desde el presupuesto de fabricación, lo cual se puede resumir en la siguiente fórmula:

$$y=a+bx$$

donde:

a = los gastos de fabricación fijos.

b = gastos variables por unidad a producir.

x = volumen de actividad.

La empresa de confecciones S.A. presenta la siguiente información para la realización de su presupuesto para la producción de 2,000 unidades mensuales:

Concepto	Costos
Materia prima	Q. 150.00 por dos unidades
Mano de obra	Q. 200.00 por dos unidades
Terminado	Q. 1,000.00 por dos unidades
Gastos fijos	Q. 2,500.00 mensuales

¿Cuál es el presupuesto final del año para la producción que se tiene prevista?

¿Cuál es el presupuesto maestro teniendo en cuenta que para el próximo año todo los costos aumenten el 10 %?

Resuelvo

Si utilizamos la fórmula $y = a + bx$ debemos definir todas las variables.

a =2,500

b = 150 + 200 + 1,000 = 1, 350

x = se espera producir 2,000 unidades mensuales.

x = 2,000 × 12 meses = 24,000 unidades anuales.

y = 2, 500 + (1,350 × 24,000) = 32, 402, 500

Por lo que se requiere presupuestar Q. 32,402, 500 para la fabricación de las 2,000 unidades mensuales.

Para presupuestar con el aumento, le aumentamos el 10 % al presupuestado de base:

Q. 32, 402, 500 + (10% × 32,402,500)= 3,240,250

Practico y aplico

La empresa SSK presenta la siguiente información para la realización de su presupuesto para la producción de 2,500 unidades mensuales:

Concepto	Costos
Materia prima	Q. 350.00 por dos unidades
Mano de obra	Q. 400.00 por dos unidades
Terminado	Q. 1,800.00 por dos unidades
Gastos fijos	Q. 4,500.00 mensuales

¿Cuál es el presupuesto final del semestre para la producción que se tiene prevista?

Desempeño: Señala el presupuesto como una herramienta que ayuda en la formación de hábitos financieros responsables que mejoran su calidad de vida y el bienestar de su familia.

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 101 04/09/2023 11:59:42

Evaluación tipo Saber

1. El resultado de la adición $\frac{x^2+5x-32}{x^3-9x}+\frac{x^3+8x-9}{x^3+3x^2}$ tiene como denominador el mínimo común múltiplo:

A. x^3-9x.
C. x^4-9x^2
B. x^2+9x
d. x^3-3x^2

2. Las indeterminaciones en una expresión racional algebraica se presentan cuando

A. el valor del numerador se hace igual a cero.
B. el valor del denominador se hace igual a cero.
C. los valores, tanto del numerador como del denominador, son iguales.
D. los valores del numerador son mayores que los valores del denominador.

3. El tiempo de una máquina que empaca gaseosa está divido en el envase y la colocación de la tapa de cada botella. Si el tiempo de envase es $\frac{x+3}{x+2}$ y el tiempo para colocar la tapa es $\frac{x+8}{x-2}$, el tiempo total de funcionamiento de la máquina es

A. $\frac{2x^2+11x+10}{x^2-2}$
C. $\frac{x^2+11x+10}{x^2-2}$
B. $\frac{x^2+11x+10}{x^2-4}$
D. $\frac{2x^2+11x+10}{x^2-4}$

4. La indeterminación en la siguiente división: $\frac{x^3-6x^2-31x+120}{x^3-3x^2+4}\div\frac{x^3+7x^2+55x-75}{x^2-x-2}$ está en

A. 1
C. ±1
B. 2
D. -1

5. Al simplificar la expresión $\frac{\left[\left(\frac{x-3}{x+2}\right)\left(\frac{x-8}{x+5}\right)\right]\div\frac{x^2-11x+24}{x+5}}{\frac{x^2}{x^2-4}}$ se obtiene

A. $\frac{1}{x^2}$
C. x^2
B. $\frac{x-2}{x^2}$
D. $\frac{1}{x+2}$

6. Los términos de la ecuación $9x^2-6x=-1$ son

A. $9x^2,-6x,-1$
C. $9x^2,-6x$
B. $9,-6,-1$
D. $x^2,\ x$

7. La igualdad $7x-49=0$ es:

A. Es una ecuación.
B. Es una identidad.
C. Es una desigualdad.
D. Las dos respuestas anteriores son correctas.

8. La igualdad $2+5-6=0$ es

A. Una ecuación sin soluciones.
B. Una igualdad falsa.
C. Una desigualdad.
D. Ninguna de las respuestas es correcta.

9. El número 3 es solución de la ecuación:

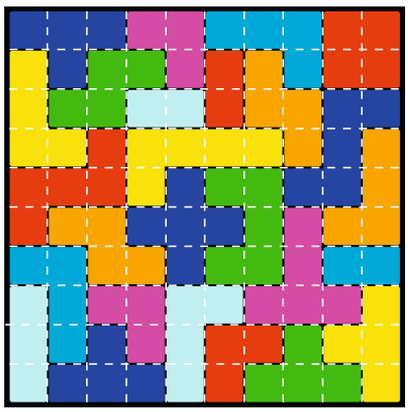
A. $2x-3=0$
B. $8(-x)+24=0$
C. $3x-10=0$
D. $x+3=0-6$

10. La igualdad $3x+7=2(x-1)$ tiene por solución

A. $x=6$
C. $x=13$
B. $5x=6$
D. $x=-9$

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 102 04/09/2023 11:59:47

Responde las preguntas 11 y 12 a partir de la siguiente imagen:



11. ¿Cuál afirmación es verdadera?

A. Menos de la mitad de fichas tiene 4 unidades cuadradas.

B. Más de un quinto del total de las fichas tiene 5 unidades cuadradas.

C. Menos de un cuarto del total de las fichas corresponde a las de dos y tres unidades cuadradas.

D. Hay 25 fichas en el rompecabezas.

12. El perímetro y el área de este rompecabezas son correspondientemente:

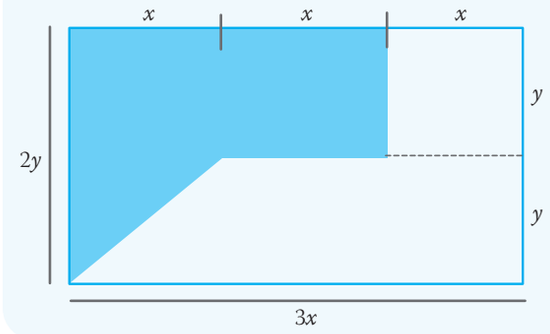
A. 40 u; 100 u^2

B. 40 u^2; 100 u

C. 400 u^2; 10 000 u

D. 400 u; 10 000 u^2

13. El área de la región sombreada puede determinarse restando al área del rectángulo grande, las áreas del trapecio y del rectángulo que no están sombreadas:



¿Cuál de las siguientes expresiones representa esta misma área?

A. $\frac{5}{2}x\,y$

B. $\frac{1}{2}x^3\,y^2$

C. $\frac{5}{2}(x\,y^5)$

D. $5xy$

¿Se va a celebrar el Día de la Familia en un colegio, para lo cual se quiere saber el número de personas que asistieron los 4 años anteriores, y con esto conocer qué tan próximos o alejados están estos datos.

Año	Asistentes
2012	50
2013	63
2014	48
2015	52

14. ¿Cuál es la desviación media de los datos?

A. 3.72

B. 5.25

C. 4.87

D. 4.25

15. ¿Cuál es la varianza?

A. 27.56

B. 32.45

C. 33.68

D. 40.56

16. ¿Cuál es la desviación típica?

A. 5.80

B. 5.24

C. 6.36

D. 5.69

L8_Unidad_3_2021 Indiv.indd 103 04/09/2023 11:59:48

Unidad 4

Funciones, sólidos y probabilidad

¿Qué aprenderé?

- Sucesiones y progresiones
- Sólidos
- Conteo y probabilidad

¿Qué lograré?

✔ Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.

✔ Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

✔ Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.)



Sucesiones

Aprendo

Patrones

Un **patrón** es una sucesión de elementos que están dispuestos de una determinada manera, este se construye siguiendo una regla, que puede ser de repetición o de recurrencia. Para el caso de los patrones de repetición, los distintos elementos son presentados en forma periódica.

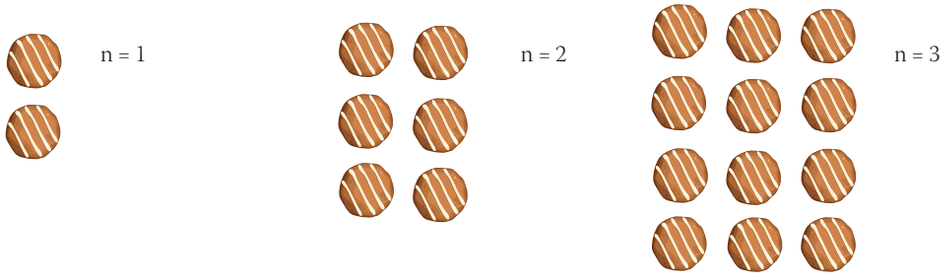
Ejemplo

La imagen muestra una interesante secuencia con galletas, donde a cada paso de la sucesión se le ha asignado $n=1$, $n=2$, $n=3$,... etc. Observamos que en $n=1$ tenemos una fila de galletas con 2 galletas, en $n=2$, dos filas de galletas con 3 galletas en cada fila; en $n=3$, tres filas de galletas con cuatro galletas en cada fila, por lo tanto, la secuencia o sucesión será la mostrada en la siguiente tabla:

N.º	1	2	3	4	5	...
N.º de galletas	2	6	12	20	30	...

En general, tienes n filas por $n+1$ galletas en cada fila, es decir, un total de $n(n+1)$ galletas en cada paso o lugar. Es decir, en el lugar número 13 de la secuencia tendremos

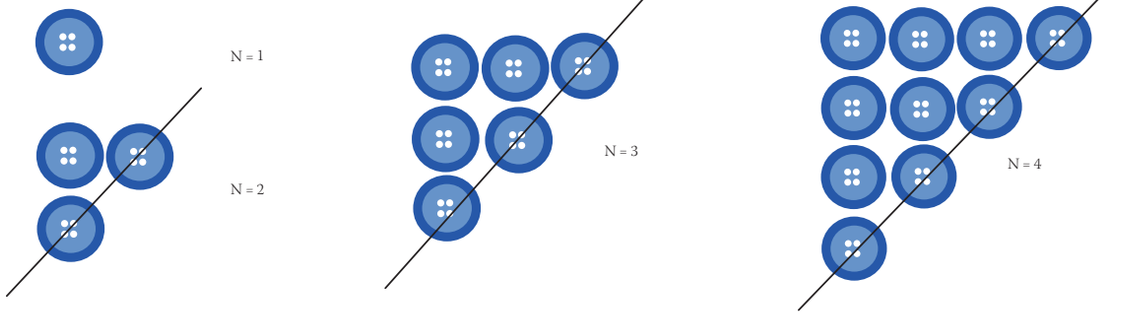
$13(13+1)=13(14)=182$ galletas en total.



n-ésimo término de una sucesión

Cada número de la sucesión ocupa un lugar de acuerdo a un orden designado, es decir, le corresponde un ordinal n=1, n=2, n=3,... Podemos entonces considerar un término representativo denominado término n-ésimo de la sucesión, que consiste en una expresión o fórmula que depende de n.

Números triangulares



Desempeño: Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 105 04/09/2023 11:57:17

De acuerdo con lo observado en la imagen, vemos que para un instante n=1 aparece 1 objeto, para n=2 aparecen 3 objetos, luego, en un instante n=3 la cantidad de objetos es 6, y así sucesivamente.

$S_n = 1+2+3+4+...+n$ Suma de número triangular n

$2S_n = \left[1+2+3+...+(n-1)+n\right]+\left[n+(n-1)+...+3+2+1\right]$ Suma de dos sucesiones

$2S_n = \left[(n+1)+(n+1)+(n+1)+...+(n+1)\right]$ Combinación de valores correspondientes

$2S_n = n(n+1)$ n veces $(n+1)$

$S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ Fórmula para la sumatoria de los n

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Con relación a la secuencia numérica -11, -8, -5, -2, 1, 4, ..., propón una regla para encontrar el número que estaría en la posición 26.

2. En la secuencia numérica $32,16,8,4,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},...$ Si 32 es la primera cantidad de la secuencia o sucesión, ¿cuál sería el número o cantidad que ocupa la posición número 46?

3. Halla los tres términos siguientes en cada sucesión. Justifica tus respuestas.

a. $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},...$

b. ▲ ▲▲ ▲▲▲

c. -123, -35, 53, ...

d. ∑, ∏, ∑, ∑, ∏, ∑, ∑, ∑, ∏

e. 45;44,9;44,7;44,4;44;43,5; ...

f. $37\times3=111.37\times33=\ 1{,}221.37\ \times\ 333=12{,}321,...$

g. 128, 256, 512,...

4. En cada una de las secuencias o sucesiones mostradas, coloca el elemento o elementos que faltan. Justifica tus respuestas.

a. $7,15,24,___,45,57,70,...$

b. $m^{16}n^3, m^{13}n^5, m^{10}n^7,$

c. $4,6,9,11,14,16,19,___,___,___$

d. $4;0{,}4;0{,}04;___;0{,}0004;___$

e. V,∞ ,VV,∞ ∞ ,VVV,___,___

f. $b,d,f,h,___,l,___$

Razonamiento y solución de problemas

5. Resuelve las siguientes situaciones y justifica tu respuesta.

a. Con ayuda de una calculadora encuentra el resultado de la suma de los primeros 79 números naturales.

b. Aplica la fórmula o expresión

$S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ para $n=79$

c. Juanita ahorra dinero de la siguiente forma: $1 el primer día, $2 el segundo día, $3 el siguiente día y así sucesivamente. ¿Cuánto ha ahorrado en total durante 79 días?

d. Con ayuda de una calculadora, encuentra el resultado de la suma de los primeros 43 números impares.

e. Aplica la fórmula o expresión $S_n = n^2$ para $n=43$.

Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 106 04/09/2023 11:57:40

Componente: Numérico-variacional

Progresiones

Aprendo

Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales donde se cumple que cada uno de ellos (excepto el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado **diferencia**.

Una progresión aritmética tiene la forma general $a_n = a_1 + (n-1) \times d$ donde $a_1 \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. a_1 corresponde al primer término de la progresión, n al lugar que ocupa el número o cantidad en la secuencia y d a la diferencia entre cualquier valor y su antecesor.

Ejemplo

Determina los 7 primeros términos de una sucesión aritmética si $a_1 = -8$ y $d = 5$

Solución

Si reemplazamos los valores de a_1 y d en la expresión general, tenemos: $a_n = -8 + (n-1) \cdot 5$

Entonces:

$$a_1 = -8 + (1-1) \times 5 = -8 + (0) \times 5 = -8 + 0 = -8$$
$$a_2 = -8 + (2-1) \times 5 = -8 + (1) \times 5 = -8 + 5 = -3$$
$$a_3 = -8 + (3-1) \times 5 = -8 + (2) \times 5 = -8 + 10 = 2$$
$$a_4 = -8 + (4-1) \times 5 = -8 + (3) \times 5 = -8 + 15 = 7$$
$$\vdots$$
$$a_7 = -8 + (7-1) \times 5 = -8 + (6) \times 5 = -8 + 30 = 22$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \times d \qquad a_1 \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

En conclusión, $a_n = \{-8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, ..., -8 + (n-1) \cdot 5\}$ forma $n + 3$

Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es una sucesión en que la razón entre dos términos consecutivos es siempre la misma.

Ejemplo

Calcula la razón de una progresión geométrica en la que el término $n = 11$ es $236{,}196$ y el primer término es 4.

Solución

De $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ con $n = 11$. Reemplazando tienes que:

$$a_{11} = a_1 \times r^{11-1} \qquad 236{,}196 = 4 \times r^{10} \qquad r^{10} = 236{,}196/4 \qquad r = \sqrt[10]{59{,}049}$$

Entonces $r = 3$

Desempeño: Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 107 04/09/2023 11:57:47

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$ corresponde a una progresión aritmética. En cada uno de los ejercicios calcula las cantidades solicitadas:

a. $b_1 = -5, \quad d = 13, \quad b_4 = \square, \; b_{10} = \square.$

b. $b_1 = 8, \quad b_4 = \frac{19}{2}, \quad d = \square, \; b_{215} = \square.$

c. $b_9 = -12, \; b_{13} = 3, \; b_1 = \square, \; d = \square.$

d. $b_1 = 3, \; b_{20} = 117, \; b_{123} = \square, \; d = \square$

e. $b_1 = 2k - 3, \; b_2 = 3k + 2, \; b_7 = \square, \; d = \square$

2. Determina cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas. Para las que lo son, calcula d y los tres términos siguientes a los mostrados.

a.	$57, \; 44, \; 31, \; 18 \ldots$	**c.**	$\frac{1}{3}, \; \frac{1}{6}, \; \frac{1}{12}, \; \frac{1}{24}$
b.	$\frac{3}{2}, \; 5, \frac{17}{2}, \; 13, \; \frac{31}{2} \ldots$	**d.**	1,550, 1,202, 854, 506, 158, −190

Razonamiento

3. $a_2 = -3$ y $a_5 = 13$ son el segundo y quinto término de una progresión aritmética.

a. Determina el término general. Justifica tu respuesta.

b. Calcula la suma de los 19 primeros términos utilizando la expresión de suma. Justifica tu respuesta.

4. Sea $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$ una progresión geométrica. Determina el valor de las variables solicitadas.

a. $b_1 = 128 \qquad r = \frac{1}{4}$

$b_5 = \square \qquad b_{15} = \square$

b. $b_1 = 100 \qquad b_6 = 1$

$r = \square \qquad b_{16} = \square$

Solución de problemas

5. Resuelve los siguientes problemas que involucran el concepto de **progresión geométrica**. En cada una de ellas argumenta la solución propuesta.

a. La depreciación de un artículo corresponde a la pérdida de su valor original a medida que transcurre el tiempo. Si una máquina pierde cada año el 20 % de su valor, y en el momento de comprarla su costo fue de 18 600 €, ¿cuál es su valor un año después de la compra?, ¿cuál es el valor 5 años después de la compra?

b. Se invierten 3 608 dólares a una tasa de interés del 4,3 % capitalizable trimestralmente. ¿Cuál es el valor de la inversión cuando ha transcurrido un año? Se desea tener una cantidad igual a tres veces la cantidad inicial, ¿cuántos trimestres deben pasar para lograr esto?

c. Un disco, que inicialmente realiza 480 revoluciones en un minuto, gira con una desaceleración angular de tal forma que al finalizar cada minuto realiza las 3/5 partes del número de revoluciones del minuto anterior. Si han transcurrido 6 minutos, ¿cuántas revoluciones ha realizado en el último minuto? ¿Cuántas revoluciones en total ha realizado desde que comenzó a registrarse su movimiento hasta el noveno minuto?

6. Escribe los primeros 7 términos de las sucesiones que se describen a continuación:

a. Una progresión aritmética con diferencia 7 y cuyo tercer término es 40.

b. Una progresión geométrica cuyo primer término es 4 y cuya razón es $\frac{1}{2}$

c. Una progresión aritmética cuya diferencia es 4 y su séptimo término es 10.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 108 04/09/2023 11:58:44

Componente: Numérico-variacional

Magnitudes proporcionales

Aprendo

Proporcionalidad directa

De dos magnitudes a y b con $b \neq 0$ se dice que están relacionadas de manera directa o directamente proporcional, cuando al dividirlas se obtiene siempre una constante k, esto es:

$$\frac{a}{b} = k \quad \text{o} \quad a = k \times b$$

Por lo tanto, si una de las magnitudes aumenta, la otra magnitud también lo hace; o si una de ellas disminuye, la otra también lo hace en la misma proporción.

Ejemplo

Un automóvil gasta 5 litros de gasolina para recorrer 192 km. Si quedan en su tanque de combustible 8 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer?

Solución

Toma a d como distancia recorrida en km y a v como cantidad de gasolina en litros, por lo tanto:

$$\frac{d}{v} = \frac{192\ km}{5\ \text{litros}} = 24\ \frac{km}{litro}$$

La constante de proporcionalidad es $k = 24\ \frac{km}{litro}$, por lo tanto: $d = \left(24\ {}^{km}\!/_{litro}\right) \times v$

Entonces, al reemplazar: $a \geq 12$ tenemos: $d = 192\ km.$

El auto recorrerá 192 km con los 8 litros de gasolina que le restan en el tanque de combustible

Proporcionalidad inversa

De dos magnitudes a y b se dice que están relacionadas de manera inversa o inversamente proporcional, cuando al multiplicarlas se obtiene siempre una constante k, esto es:

$$a \times b = k \quad \text{o} \quad a = \frac{k}{b} \quad \text{o} \quad b = \frac{k}{a}$$

Por lo tanto, si una de las magnitudes aumenta, la otra magnitud inevitablemente disminuye, o si una de ellas disminuye, la otra inevitablemente aumenta.

Ejemplo

En la construcción de una casa, 3 trabajadores gastarían 24 días. ¿Cuántos días se necesitarán si el contratista decidió emplear 15 trabajadores más para realizar el mismo trabajo con las mismas condiciones?

Toma a n como la cantidad de trabajadores y a t como el número de días, por lo tanto: $n \times t$ = (trabajadores) × (24 días) = 72 trabajadores por día.

Entonces, la constante de proporcionalidad es k= 72 trabajadores·por día. Por lo tanto:

k = 72 trabajadores • día

Al reemplazar $t = \frac{72\ trabajadores\ por\ día}{(3+15)\ trabajadores} \quad t = \frac{72\ trabajadores\ por\ día}{18\ trabajadores} \quad t = 4\ días$

Desempeño: Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 109 04/09/2023 11:58:46

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Completa la tabla indicando los casos donde las magnitudes son directas o inversamente proporcionales. Para cada uno de ellos justifica tu respuesta.

Situación	Directa o inversamente proporcional	Justificación
La velocidad del procesador de un PC y el tiempo que tarda en procesar la información.		
El tiempo de funcionamiento de una máquina y la cantidad de electricidad que consume.		
Tamaño del desagüe de un depósito de agua y el tiempo empleado en vaciarse.		
Cantidad en kg de carne y cantidad de dinero pagado por esta.		
Número de pintores y tiempo empleado para pintar un muro.		
En las taquillas de un estadio deportivo: el número de ventanillas abiertas y el tiempo de espera en la fila.		

Razonamiento y solución de problemas

2. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. Carlos le cuenta a su amiga Perla que en el almacén de su papá 3 obreros descargan un camión en 8 horas, pero que si contratan un obrero más, tardarán 2 horas menos.

b. Por 5 días trabajados Javier ha ganado Q. 1,200.00, entonces, por 18 días trabajados ganará 18 veces más.

c. Don Pablo es ganadero. En el momento actual tiene 32 vacas y alimento para darles por 60 días. Se le han muerto 9 de ellas y considera que el alimento le va a durar menos tiempo.

d. Se tiene un rectángulo de 8 m de ancho y 17 m de largo. Al aumentar en 2 m el largo y disminuir en 2 m el ancho se conserva su área.

3. Resuelve los siguientes problemas, basados en situaciones cotidianas. Para cada una de ellas argumenta y explica tus procedimientos.

a. Una caloría son 4,186 joules (unidad de energía). ¿Cuántas calorías son 121,394 joules?

b. Un corredor da 7 vueltas a una pista atlética en 21 minutos. Si continúa al mismo ritmo, ¿cuánto tardará en dar 35 vueltas?

c. En un taller se fabrican tornillos. Si se trabajan 8 horas diarias, se tardan 6 días en entregar un pedido. ¿Cuánto se tardarán en entregar un pedido si se trabajan 12 horas diarias?

d. Cuarenta y cinco (45) computadores cuestan Q. 96,864.86. ¿Cuánto cuestan 117 de ellos? ¿Cuánto cuesta uno de ellos?

Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 110 04/09/2023 11:58:46

Componente: Numérico-variacional

Concepto de función – función lineal

Aprendo

Función

Una **función** es una regla que establece una correspondencia entre dos conjuntos A y B. A los elementos del conjunto A se les denomina **dominio de la función** y a los del conjunto B, **rango de la función**. Se debe cumplir que cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del rango. Una función en general es una relación, pero no toda relación es una función.

Ejemplo

El modelo matemático o función corresponde a una regla que involucra las dos magnitudes. Para el caso de la velocidad de propagación del sonido en el aire, la función está dada por:

$$USD = COP - 2700 \cdot$$

Basta, por ejemplo, sustituir la temperatura del aire por $\frac{3}{5}$, multiplicar esta por x y al resultado sumarle 331 m/s, y así obtener el resultado de:

$$x = \frac{3}{5}(300)$$

La temperatura del aire se considera entonces como una variable independiente, porque puede tomar diferentes valores (permitidos), y la velocidad de propagación del sonido se considera como la variable dependiente, pues esta toma sus valores de acuerdo a los valores que tome la temperatura, dados por la aplicación de la regla o modelo.

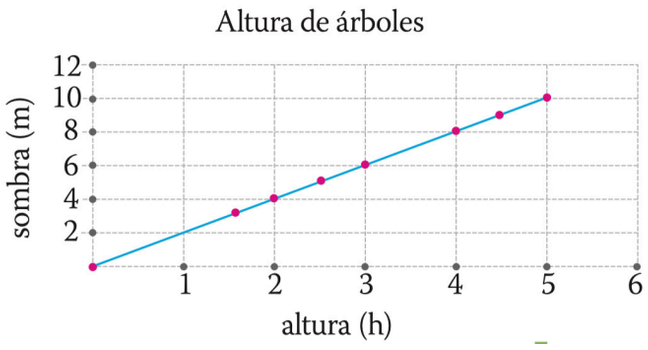
Función lineal

Una **función lineal** es una función cuyo dominio son todos los números reales, cuyo codominio también todos los números reales y cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado. La función lineal se define por medio de la ecuación $y = mx$ $f(x) = mx$, donde m es un número real y se denomina **pendiente de la recta**.

Las siguientes son representaciones de la relación entre la altura de un conjunto de árboles de un parque y la longitud de la sombra que proyectan a cierta hora del día.

La siguiente gráfica también representa la relación entre la altura del árbol y la longitud de su sombra.

h Altura del árbol (*m*)	*S* Longitud de la sombra (*m*)
1.5	3
2	4
2.5	5
3	6
4	8
4.5	9



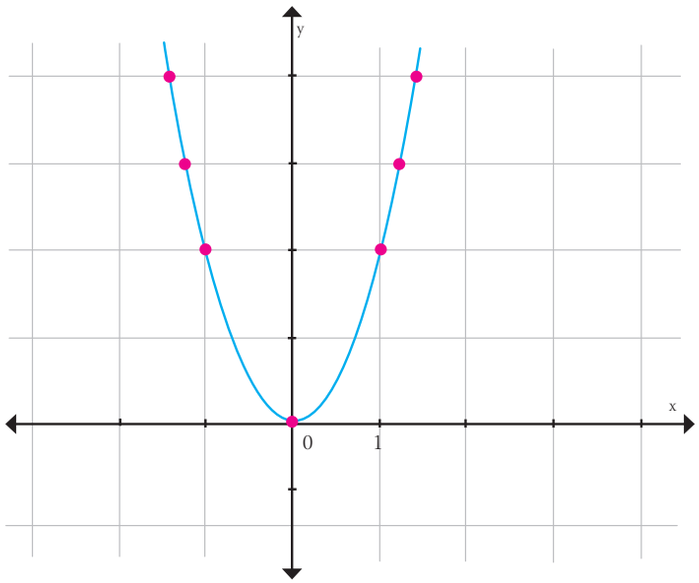
Desempeño: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 111 04/09/2023 11:58:46

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. La imagen muestra un plano cartesiano, en el cual encontramos una curva denominada **parábola**, que corresponde a un tipo especial de función.



a. Escribe las coordenadas de cada uno de estos puntos de la forma $P(x, y)$.

b. Determina la "regla" que permite obtener el valor de y a partir del valor de x.

2. Encuentra puntos que cumplan las siguientes condiciones.

a. Puntos P_1 y P_2 tales que la línea entre ellos pase por el origen del plano cartesiano.

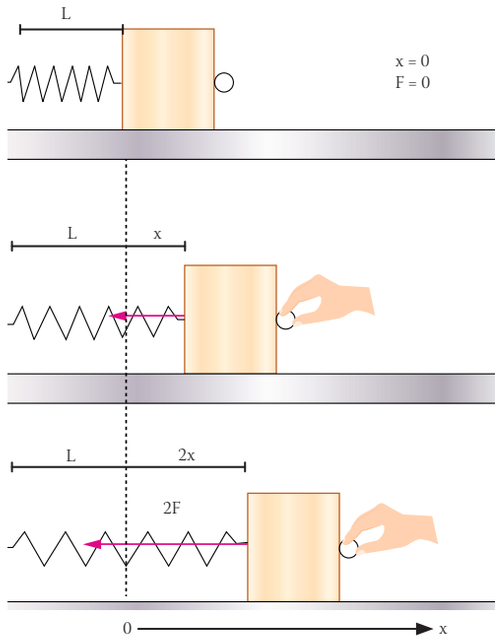
a. Puntos P_3 y P_4 tales que la recta que pasa por ellos sea perpendicular a la recta que pasa por P_1 y P_2.

a. Puntos P_5 y P_6 que tengan la misma ordenada, de modo que P_5 esté en la recta P_1P_2 y P_6 esté en la recta P_3P_4.

Solución de problemas

3. La tabla muestra los valores de longitud de un resorte que es alargado por causa de una fuerza aplicada en uno de sus extremos.

Elogación (cm)	0	5	10	15	20
Fuerza (newton)	0	60	120	180	240



a. Dibuja un plano cartesiano y marca sus ejes vertical y horizontal como **Fuerza** (newton) y **Elongación** (cm), respectivamente.

b. Representa los datos de la tabla como puntos en un plano cartesiano debidamente escalado y únelos. ¿Qué figura o tipo de trazo obtienes? Justifica tu respuesta.

c. Escribe una expresión algebraica en donde se muestre la relación entre la elongación o alargamiento del resorte en cm y la fuerza aplicada en newton. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad? Explica tu respuesta.

d. Determina si la expresión obtenida corresponde a una función lineal o a una función afín.

4. Dibuja en un plano cartesiano un triángulo cuyos vértices están dados por los puntos $P=(-4\ ,\ -6)$, $Q=(7\ ,\ 0)$ y $R=(-1\ ,\ 5)$.

Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 112 04/09/2023 11:58:47

Componente: Numérico-variacional

Ecuación lineal

Aprendo

Ecuación de la recta

Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son las respectivas coordenadas de los puntos P_1 y P_2 de una recta, se define como pendiente de la misma a un número real m que se obtiene de la razón o división de la variación de y entre la variación de x, esto es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si m es positivo, la recta de izquierda a derecha crece. Si m es negativo, la recta de izquierda a derecha decrece. Si $m=0$ la recta es horizontal.

Caso 1. Se conoce la pendiente y el intercepto con el eje vertical. En este caso, solo basta reemplazar en la ecuación de la recta los valores de m y b.

Ejemplo

Identificar la pendiente y el intercepto y dada la ecuación de la recta $C(x) = -156 + 9.4x$.

Solución

Al ordenar la ecuación $C(x) = 9.4x - 156$ y comparar con $y = mx + b$, deduces que $m = 9.4$ y $b = -156$.

Caso 2. Se conocen dos puntos.

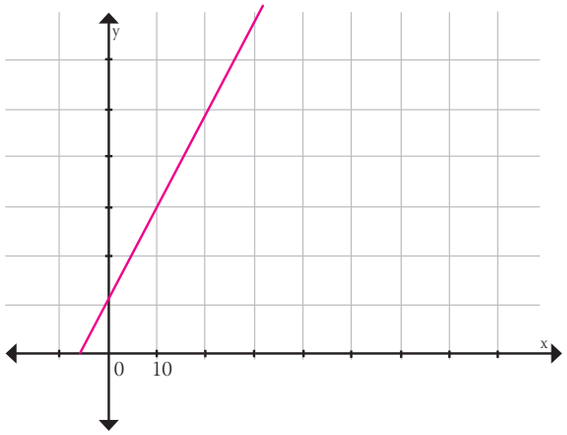
Ejemplo

Es claro que cuentas con dos puntos o parejas ordenadas $P_1 = (35, 95)$ y $P_2 = (115, 239)$. A partir de ellos, calculas sus respectivas variaciones, para así determinar la pendiente, esto es:

$$m = \frac{\Delta T_F}{\Delta T_C} = \frac{T_{F1} - T_{F_2}}{T_{C_1} - T_{C_2}} = \frac{239 - 95}{115 - 35} = \frac{144}{80} = \frac{9}{5}$$

Por lo tanto, si sustituyes lo obtenido en la ecuación de la recta, tienes:

$$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32$$



Caso 3. Se conocen un punto y la pendiente.

Un método alternativo al expuesto en el apartado anterior consiste en reescribir la ecuación de la pendiente, reemplazar la abscisa x_0 y la ordenada y_0 del par ordenado, además de la pendiente, y posteriormente, llevar la expresión a la forma $y = mx + b$. Esto es:

De $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ tienes $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$.

Desempeño: Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 113 04/09/2023 11:58:54

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Para cada par de puntos, determina la pendiente de la recta que pasa por ellos. Justifica tu respuesta.

a. $P_1 = (4, 3)$

b. $P_1 = (8, -4)$ $\quad P_2 = \left(\frac{3}{5}, 2\right)$

c. $P_1 = (7, -5)$ $\quad P_2(-5, -5)$

d. $P_1 = \left(0, \frac{5}{8}\right)$ $\quad P_2 = \left(\frac{5}{8}, 0\right)$

2. Para cada una de las siguientes afirmaciones determina si es verdadera o falsa y justifica tu respuesta.

a. La recta con ecuación $y = 0$ es una recta paralela al eje y. ☐

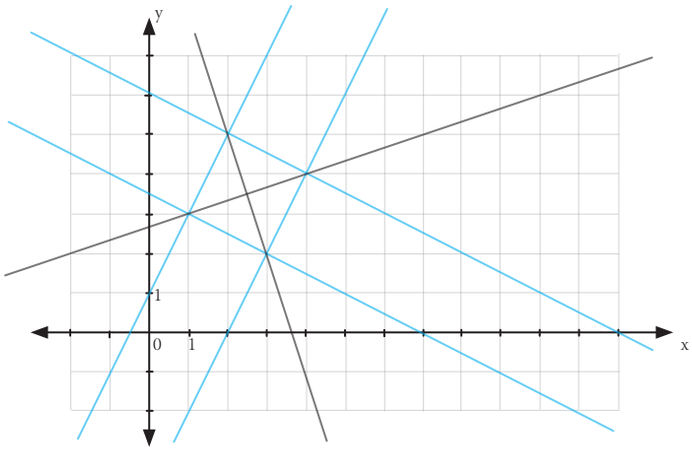
b. Las rectas con ecuaciones $y = 2x + 1$ y $y = 2x + 3$ son paralelas. ☐

c. La recta con ecuación $2.x + 3y = 11$ tiene pendiente positiva. ☐

d. La pendiente de una recta se escribe como $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. ☐

e. Las rectas $2x - y = 3$ y $-2x + y = -3$ son la misma. ☐

3. Halla las ecuaciones de las seis rectas dibujadas en el plano a continuación:



A partir de los resultados obtenidos determina qué relación hay entre las rectas paralelas y perpendiculares y sus ecuaciones. ¿Cuántas pendientes diferentes obtuviste?

Solución de problemas

4. Sea $y_1 = 12x + 400$ los ingresos de una compañía que vende un determinado volumen de artículos al mes.

a. Explicar los valores **12** y **400** en términos del contexto financiero planteado.

b. ¿La expresión $y_2 = 185 + 12x$ corresponde, en términos gráficos, a una recta paralela a y1? Justifica tu respuesta.

5. Determinar una recta paralela y otra que no lo sea a la recta dada.

a. $V = -4/5i + 40$

b. $R(x) = 10{,}4 + 6{,}3x$

c. $5(3y - 2x) - 12 = 0$

d. $2/5\,x - 4/3y = -1/15$

6. Determina si L_1 y L_2 son rectas perpendiculares. Explica tu respuesta. Recordar que si se cumple que $m_1 \cdot m_2 = -1$, entonces dichas rectas se cortan formando 4 ángulos rectos o de 90°.

a.	$L_1: y = -\frac{4}{5}x + 3$	$L_2: y = \frac{5}{4}x + 3$
b.	$L_1: y = 7x - 11$	$L_2: y = 7x + 3$

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

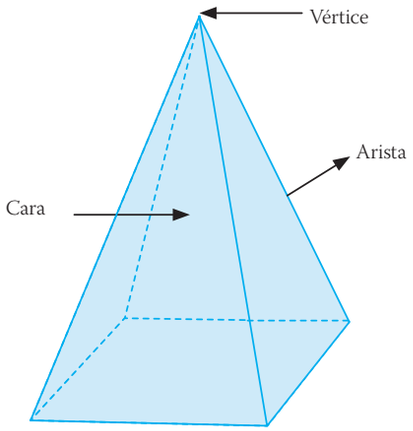
L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 114 04/09/2023 11:59:01

Cuerpos geométricos

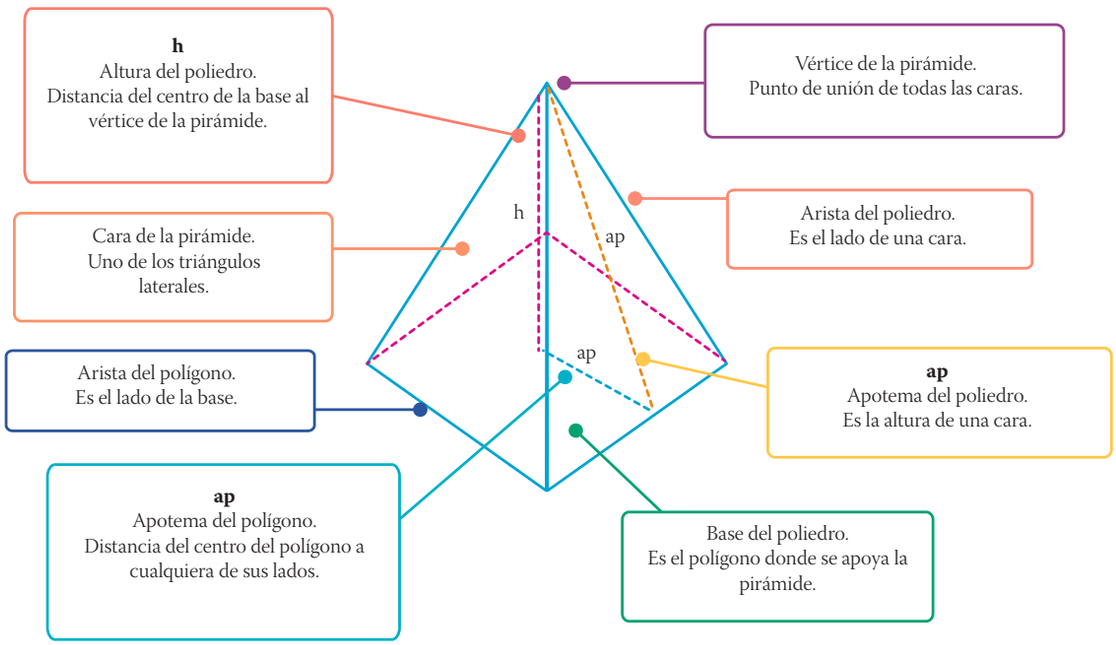
Aprendo

Pirámides

Las **pirámides** son poliedros que tienen una base de cualquier forma poligonal y sus caras laterales son triángulos (equiláteros, isósceles o escalenos), que coinciden en un punto denominado **vértice**. Las pirámides tienen tantos triángulos en su superficie lateral como lados del polígono de su base; las líneas en las que se unen las caras se denominan **aristas**.



Otros elementos que componen una pirámide son:



Las pirámides pueden ser clasificadas bajo tres criterios, así:

Primer criterio:

- Según el número de lados del polígono de su base, podemos tener: pirámide de base cuadrada, pirámide de base pentagonal, pirámide de base hexagonal…etc.

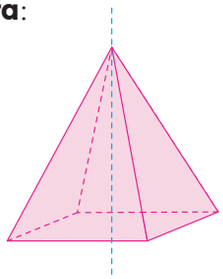
Desempeño: Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 115 04/09/2023 11:59:01

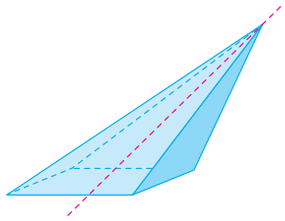
Segundo criterio:

Según la inclinación de su altura con respecto a su base, tenemos:

- Si la altura y la base tienen una relación de perpendicularidad, entonces hablamos de **pirámide recta**:



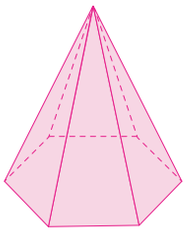
- Si la altura y la base no son perpendiculares entre sí, hablamos de **pirámide oblicua**:



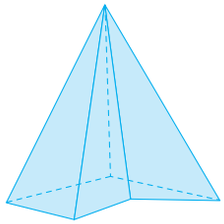
Tercer criterio:

Según la forma del polígono de la base, tenemos:

- Si la base es un polígono convexo, se denomina **pirámide convexa**.

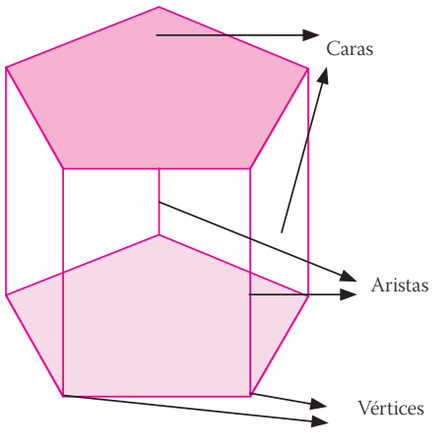


- Si la base es un polígono cóncavo, se denomina **pirámide cóncava**.

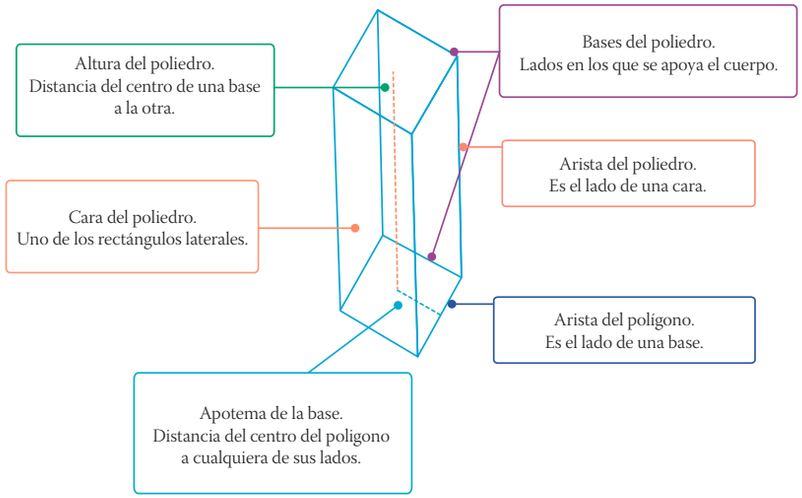


Prismas

Los **prismas** son poliedros limitados por dos polígonos iguales (regulares o irregulares) que son sus bases, cuyas caras laterales son paralelogramos (con ángulos internos agudos o rectos). Tienen tantos paralelogramos en su superficie lateral como lados del polígono de las bases. Las líneas en que se unen las caras son denominadas **aristas**, y el punto donde se intersecan tres aristas es llamado **vértice**.



Otros elementos que componen un prisma son:



Utiliza y explica diferentes estrategias para encontrar el volumen de objetos regulares e irregulares en la solución de problemas en las matemáticas y en otras ciencias.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 116 04/09/2023 11:59:01

Los prismas pueden ser clasificadas bajo tres criterios:

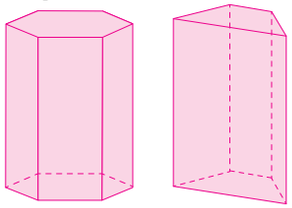
Primer criterio:

- Según el número de lados del polígono de su base, podemos tener: prisma de base cuadrada, prisma de base pentagonal, prisma de base hexagonal…etc.

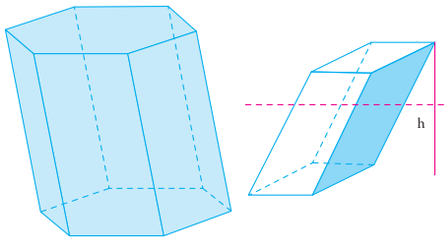
Segundo criterio:

Según la inclinación de su altura con respecto a su base, tenemos:

- Si la altura y la base tienen una relación de perpendicularidad entre si, entonces hablamos de **prisma recto**:



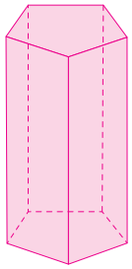
- Si la altura y la base no son perpendiculares entre sí, hablamos de **prismas oblicuos**:



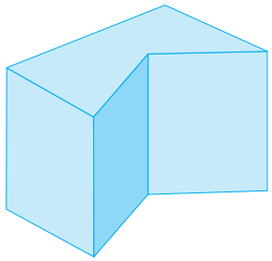
Tercer criterio:

Según la forma del polígono de la base, tenemos:

- Si la base es un polígono convexo, se denomina **prisma convexo**.

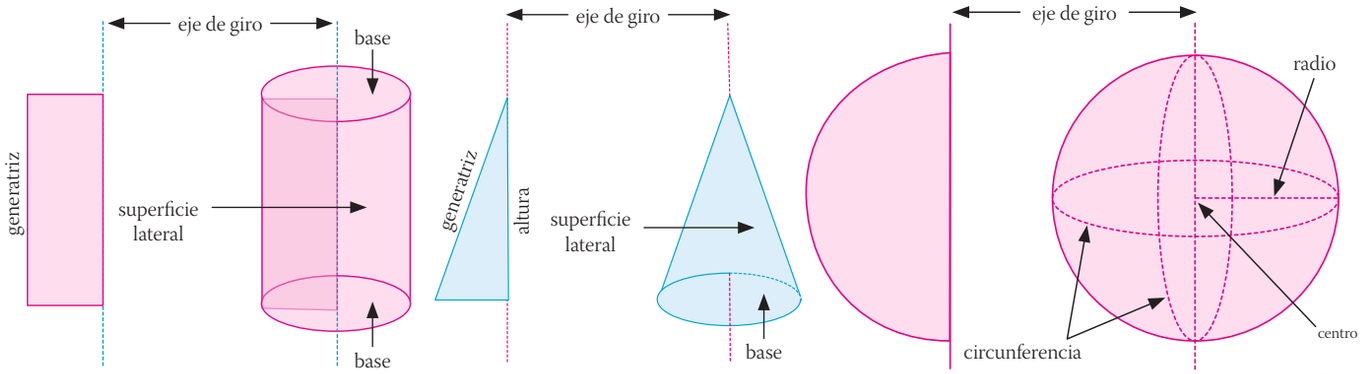


- Si la base es un polígono cóncavo, se denomina **prisma cóncavo**.



Sólidos de revolución

Los **sólidos de revolución** son cuerpos que se obtienen al realizar la transformación geométrica denominada **rotación** cuando una superficie plana rota alrededor de una recta en su mismo plano, que es denominada **eje de revolución**. Los sólidos de revolución tienen superficies curvas, por tanto, son cuerpos redondos que no tienen aristas porque sus superficies no son poligonales. La figura plana que gira sobre el eje de rotación se denomina **figura generatriz**.



Desempeño: Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 117 04/09/2023 11:59:02

Aplico mis conocimientos

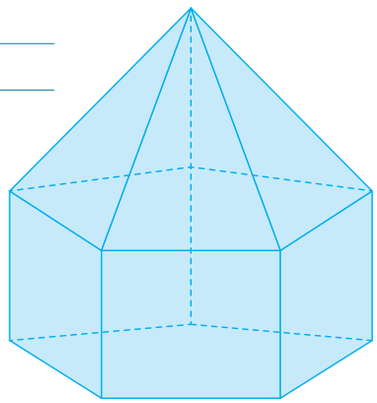
Comunicación

1. Cuántas caras, vértices y aristas tiene el sólido compuesto por una pirámide pentagonal y un prisma pentagonal mostrado en la siguiente imagen:

Caras: _____

Vértices: _____

Aristas: _____



Razonamiento

2. Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). Luego, realiza los cambios necesarios a las proposiciones falsas, para hacerlas verdaderas

a. Un sólido de revolución es un poliedro. ☐

b. Un cubo tiene 12 aristas congruentes. ☐

c. Un prisma tiene una base que corresponde a un polígono. ☐

d. Una pirámide tiene un vértice. ☐

3. ¿Qué le ocurre a un prisma cuando el número de caras laterales (paralelogramos) aumenta? Justifica tu respuesta.

4. ¿Cuántos triángulos hacen falta para formar una pirámide, si esta tiene 6 triángulos y un heptágono? Justifica tu respuesta.

5. ¿Cuál es el sólido de revolución, si la generatriz es un triángulo isósceles con su lado más corto sobre el eje de revolución? Justifica tu respuesta y dibújala.

Solución de problemas

Ten en cuenta la siguiente información para resolver las preguntas 6, 7 y 8:

Ecuación de Euler: Para los poliedros se puede establecer que C+V-A=2, donde:

C es el número de caras.

V es el número de vértices.

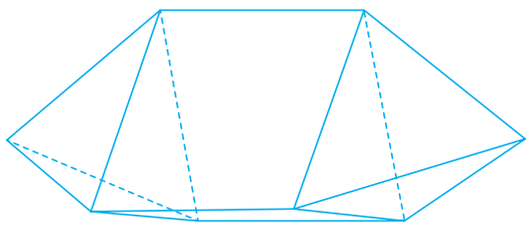
A es el número de los bordes del poliedro o aristas.

6. ¿Es posible formar un poliedro con 9 caras, 12 vértices y 19 aristas?

7. Si un poliedro tiene 10 aristas y 6 vértices, ¿cuántas caras tiene?

8. Dibuja el poliedro del punto 12.

9. Cuenta las caras, vértices y aristas del siguiente poliedro y verifica el cumplimiento de la ecuación de Euler:



10. En tu cuaderno dibuja la figura que se debe girar para obtener esta botella como sólido de revolución.



L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 118 04/09/2023 11:59:03

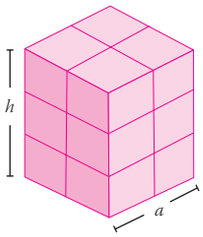
Componente: Métrico-geométrico

Volumen y área superficial

Aprendo

Volumen externo

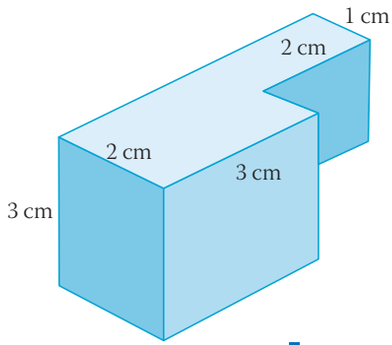
El **volumen** es una magnitud representada por unidades estándar, denominadas **unidades cúbicas**. Es considerada como una magnitud que permite medir, y es definida como la extensión en tres dimensiones de una región ubicada en el espacio. Al corresponder a una medida, el volumen se puede hallar a través de dos métodos sencillos, uno por conteo de unidades cúbicas y otro por fórmula. El conteo de unidades cúbicas para hallar el volumen se puede realizar por pisos como se muestra en la figura, donde cada uno de los tres pisos tiene 4 unidades cúbicas, por lo tanto, 12 unidades cúbicas corresponden al volumen de este prisma.



Ejemplo

Según la imagen lateral, la figura es un prisma cuya base es un polígono irregular, de esta forma debes reconocer el área de la base y la altura. El área de la base es la suma del área del rectángulo grande más el área del rectángulo pequeño, y la altura del sólido es 3 cm:

(Área rectángulo grande + área rectángulo pequeño) × altura	Volumen del prisma
[3 cm×2 cm)+ (2 cm×1 cm)]3 cm	Volumen del prisma
[6 cm²+2 cm²]×3 cm	Volumen del prisma
8 cm²×3 cm	Volumen del prisma
24 cm³	Volumen del prisma



Volumen interno o capacidad

Para medir el **espacio que ocupan los líquidos** se utilizan recipientes de medidas fijas que los contienen. El volumen interior de dichos recipientes se denomina **capacidad** y su unidad básica de medida es el litro, que representa la capacidad de 1 dm³.

A continuación, se puede observar la tabla de múltiplos y submúltiplos de la unidad de medida de capacidad:

Submúltiplos			Unidad básica	Múltiplos		
Mililitros (ml) $\frac{1}{1000}l = 10^{-3}l = 1cm^3$	Centilitro (cl) $\frac{1}{100}l = 10^{-2}l$	Decilitro (dl) $\frac{1}{10}l = 10^{-1}l$	Litros (l) $10^0 l = 1dm^3$	**Decalitro** $1Dl = 10^1 l$	**Hectolitro** $1Hl = 10^2 l$	**Kilolitro (Kl)** $1Kl = 10^3 l = 1m^3$

Desempeño: Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 119 04/09/2023 11:59:05

Ejemplo

Según la historia del videojuego, para protegerse del ejército británico, John Black debe abastecerse llenando un tanque con agua, el tanque queda a máxima capacidad con 300 cubetas, cada cubeta es llenado con 50 tazas, y cada taza tiene la capacidad de 230 ml; por tal razón, debe llenarse el tanque completo con esta medida: capacidad del tanque= 230 ml × 50 tazas × 300 cubetas.

Por cadena de equivalencias, tanto las tazas como los las cubetas pueden ser expresados en ml.

230 ml × 50 tazas × 300 cubetas — Capacidad del tanque

230 ml × 15,000 — Capacidad del tanque

3,450,000 ml — Capacidad del tanque

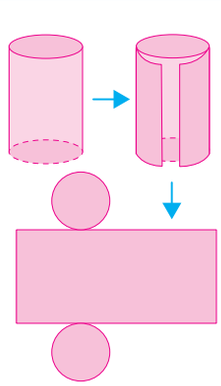
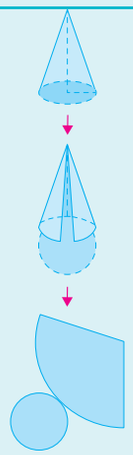
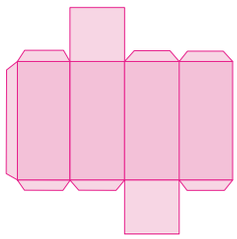
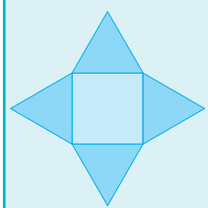
Haciendo la conversión de ml a l, dividimos entre 1,000

3,450,000 ml/1,000 — Capacidad del tanque

Por lo tanto, con 3,450 litros se llenó el tanque de abastecimiento de agua para combatir a los británicos en la guerra de John Black.

Área superficial

El **área superficial** de un cuerpo geométrico es el área de los componentes de su desarrollo plano, es decir, el área de todas sus caras. Para conocer los desarrollos planos que nos permiten hallar el área superficial, desplegamos las figuras tridimensionales para ser representadas de forma bidimensional, dependiendo de la clase de superficie que las recubre:

Área total = área basal + área lateral	$(2\pi r \times h) + 2(\pi r^2)$	$(\pi rg) + 2\pi r^2$	$2l^2 + 4(l \times h)$	$l^2 + 4\left(\frac{l \times h}{2}\right)$
Gráfica				

Describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico.

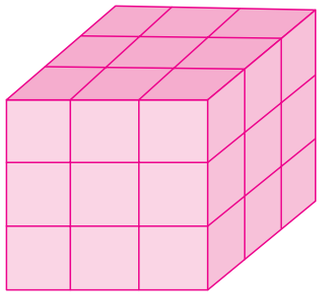
L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 120 04/09/2023 11:59:05

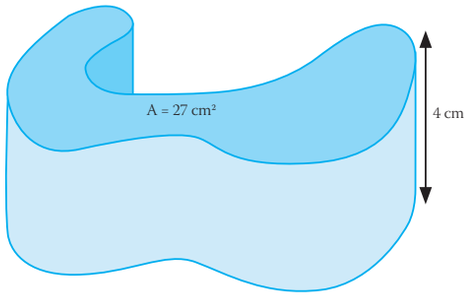
Componente: Métrico-geométrico

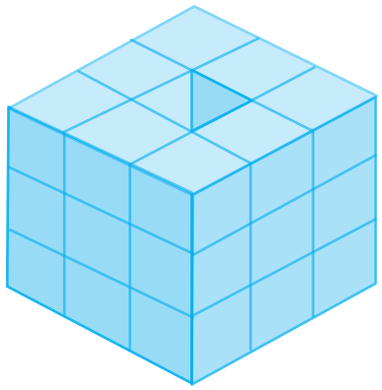
Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Calcula en tu cuaderno el volumen de cada figura.







Razonamiento

2. Completa la siguiente tabla, donde se establece el tiempo transcurrido y la cantidad de agua, medida en mililitros o litros, que se pierde por el grifo del lavamanos.

1 hora	2 horas	6 horas	15 horas	**Un día**
Mililitros				
Litros				

3. Calcula cuánto tiempo ha transcurrido cuando en el lavamanos se ha perdido un litro de agua.

4. ¿Cuál es el área superficial de una pirámide de base rectangular, que tiene 4 cm de largo y 3 cm de ancho como dimensiones de su base, y 7 cm de altura?

Solución de problemas

5. En una clase de culinaria se conforman siete grupos de estudiantes, en donde cada grupo utiliza 350 ml de leche para preparar 10 *pancakes*. ¿Cuántos decímetros cúbicos de leche se utilizan para preparar los *pancakes* para todo el curso?

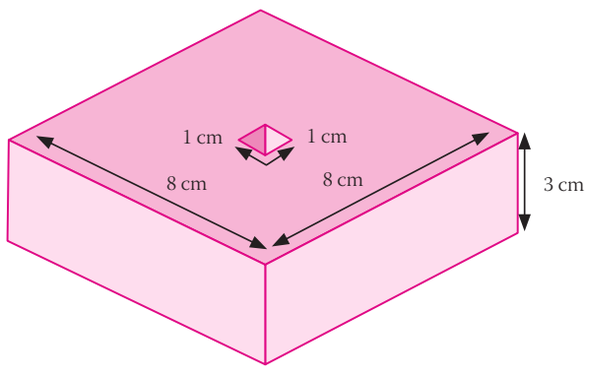
6. Si el volumen de una esfera se halla con la fórmula:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Halla el volumen de un contenedor de petróleo en metros cúbicos cuyo radio es de 12 metros.

7. Consulta qué es un pluviómetro, qué se mide con este instrumento y cuál es su relación con el concepto de *volumen*.

8. Halla el volumen de la siguiente figura y exprésalo en metros cúbicos.



9. El acuario de Churaumi en Okinawa, es considerado uno de los más grandes del mundo. Tiene una capacidad de 7,500 metros cúbicos. Si su forma es rectangular, ¿cuáles pueden ser sus dimensiones?

Desempeño: Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 121 04/09/2023 11:59:06

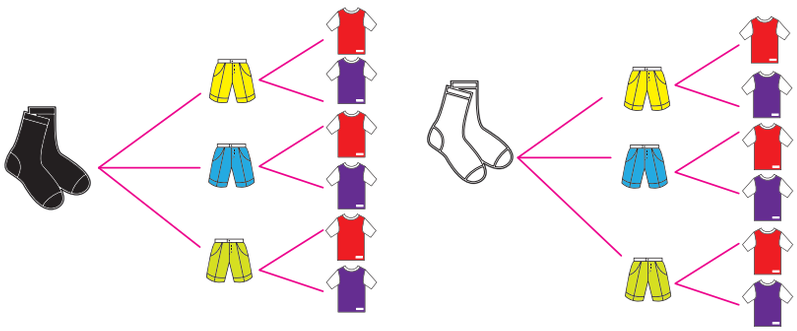
Técnicas de conteo

Aprendo

Principio de multiplicación

El **principio de la multiplicación** enuncia que si una primera acción puede realizarse de m maneras y una segunda acción puede realizarse de n maneras, entonces la secuencia de ambas acciones pueden efectuarse de $m \times n$ maneras distintas .

En algunos casos, un diagrama de árbol nos permite visualizar con mayor facilidad las posibles opciones sobre uso del uniforme. Observa:



Atendiendo a tales condiciones, es claro ver que el diagrama de árbol muestra que hay 12 ramificaciones, por tanto, hay 12 posibilidades de combinar los uniformes.

Permutaciones

Una **permutación** es una agrupación o subconjunto de elementos tomados de un conjunto que cumplen las siguientes condiciones:

1. Sí importa el orden.
2. Se toman en cuenta todos los elementos.

Permutaciones sin repetición

Ejemplo

Se quiere saber cuántos números se pueden formar con las cifras 2, 3 y 5 de modo que no se repitan.

Al hacer la primera elección se tienen 3 posibilidades (2-3-5); en la siguiente elección se reducen las posibilidades y, dado que ya se ha escogido el número 2, se tienen dos posibilidades (3-5); en la última elección solo queda el número 5, por lo que este corresponderá a la elección.

En tal caso, el total de permutaciones corresponde a:

$$3\times(3-1)\times(3-2)=3!$$

Tal expresión, de forma general, puede expresarse como:

$$n(n-1)(n-2)...(n(n-1))=n!$$

$$\text{Donde } n = \text{número de opciones}$$

Sin embargo, para determinar el número de permutación sin repetición, de n elementos seleccionados de un total de m, corresponde a:

$$P(m,n)=\frac{m!}{(m-n)!}$$

Hace predicciones sobre la posibilidad de ocurrencia de un evento compuesto e interpreta la predicción a partir del uso de propiedades básicas de la probabilidad.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 122 04/09/2023 11:59:07

Permutaciones con repetición

Ejemplo

Así como en el caso anterior no era posible repetir los dígitos, existen permutaciones en las que es posible usar repetidamente los dígitos.

En el ejemplo anterior, si se pudieran repetir los dígitos, se tendrían 3 dígitos para elegir y elegirían 3 de ellos, entonces las permutaciones posibles son: $3\times3\times3=3^3$, con lo que tendrían 27 posibilidades.

De manera general, esto se puede expresar diciendo que tenemos n dígitos para elegir y al elegir r de ellas, las permutaciones posibles son: $n\times n\times n\times ...(r \text{ veces})=n^r$.

Combinaciones

Las **combinaciones** son agrupaciones o subconjuntos de elementos tomados de un conjunto que cumple las siguientes condiciones:

1. No importa el orden.

2. Se toman en cuenta todos los elementos.

Una **combinación** se puede denotar como ${}_n\mathrm{C}_r$ o $\binom{n}{r}$, donde n es la cantidad de elementos del conjunto (espacio muestral) y r es la cantidad de elementos que se van a seleccionar.

Ejemplo

En la cena de Fin de Año de una empresa se ofrecen 5 opciones de menús diferentes; pero los invitados pueden probar 3 menús diferentes.

Para hallar el total de combinaciones se aplica:

$$ {}_nC_r=\left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array}\right)=\frac{n!}{(n-r)!r!} $$

Debes reconocer que en esta situación el orden no cobra importancia; no importa en qué orden se seleccionen los menús y no existe la posibilidad de repetir.

Teniendo en cuenta tales indicaciones, al hallar el número de combinaciones se tiene que:

$$ {}_5C_3=\left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array}\right)=\frac{5!}{(5-3)!3!} $$

$$ {}_5C_3=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{(5-3)!3!} $$

$$ {}_5C_3=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{(2)!3!} $$

$$ {}_5C_3=\frac{5\times4\times\cancel{3\times2\times1}}{(2\times1)\cancel{3\times2\times1}} $$

$$ {}_5C_3=\frac{5\times4}{2\times1} $$

$$ {}_5C_3=\frac{20}{2} $$

$$ {}_5C_3=10 $$

Por tanto, los trabajadores de la empresa tienen 10 opciones diferentes de combinar los menús.

Desempeño: Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 123 04/09/2023 11:59:08

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. ¿Explica cuál es la diferencia entre una permutación y una combinación?

2. Explica si cada una de las siguientes situaciones hacen referencia a permutaciones o combinaciones. Justifica tus respuestas.

- **a.** Un estudiante debe contestar por lo menos 5 preguntas de un examen de 10 preguntas. ¿De cuántas formas distintas puede el estudiante hacer su elección?
- **b.** ¿De cuántas formas se pueden ubicar 5 personas en una fila de 5 sillas?
- **c.** En un salón de clases hay 15 estudiantes. ¿De cuántas maneras se pueden conformar grupos de 4 estudiantes?
- **d.** Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar?

3. Halla el valor de cada una de las siguientes expresiones y plantea, en cada caso, dos situaciones a las cuales se puedan aplicar.

- **a.** Hallar el valor de la expresión $\frac{n!}{(n-r)!r_{¡}}$, cuando n = 8 y r = 5
- **b.** Hallar el valor de la expresión $\frac{n!}{(n-r)!r_{¡}}$, cuando n = 6 y r =2
- **c.** Hallar el valor de la expresión $\frac{m!}{(m-n)!}$, cuando m = 4 y n = 1
- **d.** Hallar el valor de la expresión $\frac{m!}{(m-n)!}$, cuando m = 9 y n = 3

4. Una persona dispone para vestirse de 3 pantalones, 5 camisas y 2 pares de zapatos. ¿De cuántas formas distintas se puede vestir?

- **a.** Apoya tu respuesta con el diagrama de árbol correspondiente.
- **b.** ¿Cuántas posibilidades existen si se añade un par de zapatos?

Solución de problemas

5. ¿De cuántas formas se pueden ubicar 4 estudiantes si disponen de 6 sillas en un salón de clases?

6. Marcos, Julio y Antonio participan en una competencia de automovilismo. Si la primera posición gana medalla de oro; la segunda, plata y la tercera, bronce:

- **a.** ¿Cuántas posibilidades de repartición de medallas hay?

7. ¿De cuántas formas pueden colocarse los 5 jugadores de un equipo de fútbol, teniendo en cuenta que el portero no puede ocupar otra posición distinta a la portería?

8. Para los juegos intercursos de un colegio, cada curso debe crear un eslogan que lo identifique. Si un grupo de estudiantes tiene 5 colores distintos para pintarlo, pero solo pueden escoger 3, ¿cuántas posibilidades de elección tienen?

9. En la elección del menú, para su fiesta de cumpleaños, Enrique puede elegir entre 4 platos fuertes, 3 entradas y 5 postres, ¿cuántas opciones de menú tiene Enrique?

10. Uno de los equipos que participa en la semana deportiva de un colegio desea que su bandera tenga los 7 colores del arcoíris en sus 7 franjas horizontales. ¿Cuántas banderas diferentes pueden confeccionarse?

11. ¿Cuántos números de 5 cifras que no se repitan pueden formarse con los dígitos impares?

12. ¿Cuántos números de 5 cifras pueden formarse si el número empieza por 3?

13. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras son mayores que 7,000?

14. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden organizar 10 amigos para fotografiarse uno al lado de otro?

Hace predicciones sobre la posibilidad de ocurrencia de un evento compuesto e interpreta la predicción a partir del uso de propiedades básicas de la probabilidad.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 124 04/09/2023 11:59:09

Probabilidad

Aprendo

Experimentos, espacio muestral y eventos

Un experimento es un suceso en el cual se lleva a cabo una observación. Por una parte, son **experimentos aleatorios** aquellos en los que el azar juega un papel determinante, es decir, que su comportamiento es impredecible. Por otra parte, son **experimentos determinísticos** aquellos en los cuales es posible determinar con certeza su resultado.

Ejemplos

Otros ejemplos de experimentos aleatorios y determinísticos son:

- Ganarse la lotería es un ejemplo de experimento aleatorio, pues no se sabe qué números serán los ganadores.
- Resolver la ecuación $40 \div 8 = x$ es un fenómeno determinista, pues se sabe con certeza que el resultado es 5.

Ejemplo

Se denomina **espacio muestral** al conjunto de todas las posibilidades de un experimento aleatorio. Se simboliza (E).

El espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio *determinar el departamento ganador* corresponde a:

$E = \{\text{contabilidad, desarrollo humano, ventas, arriendos, reparaciones, servicios varios}\}$

Ejemplo

Un **suceso** es cada uno de los subconjuntos del espacio muestral. Se designa escribiendo entre corchetes los posibles resultados.

Tipos de sucesos:

Suceso elemental: formado por un único elemento del espacio muestral.

$A = \text{obtener un } 3 \rightarrow A = \{Ventas\}$

Suceso compuesto: formado por más de un resultado, es decir, por dos o más sucesos elementales.

$B = \text{obtener un número impar} \rightarrow B = \{\text{contabilidad, ventas, reparaciones}\}$

Suceso seguro: es aquel que está formado por todos los posibles resultados (es decir, por el espacio muestral).

$C = \text{obtener un número del 1 al 6} \rightarrow C = \{\text{contabilidad, desarrollo humano, ventas, arriendo, reparaciones, servicios varios}\}$

Suceso imposible: suceso que nunca ocurre en un experimento.

Desempeño: Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 125 04/09/2023 11:59:10

Probabilidad simple

La **probabilidad de un evento** corresponde al cociente entre el número de eventos favorables y el número total de eventos del espacio muestral. Es un valor numérico entre 0 y 1. La probabilidad de un evento A se denota como $P(A)$.

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

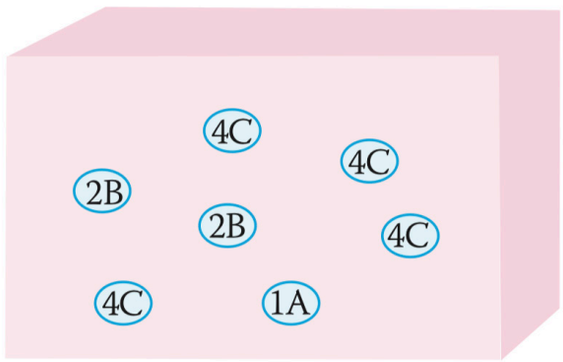
Sabiendo que la probabilidad de que ocurra un evento está dada por un valor numérico entre 0 y 1; por una parte, si la probabilidad arroja un valor de 0, es imposible que el evento ocurra. Por otra parte, si es 1, implica que este con seguridad ocurrirá. Esto matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Ejemplo

Si en una caja se tienen 7 fichas marcadas con las letras A, B y C, como lo muestra la siguiente ilustración:

Según la regla de Laplace, la probabilidad del evento:



- Sacar al azar una ficha marcada con A es $\frac{1}{7}$.
- Sacar al azar una ficha marcada con C es $\frac{4}{7}$.
- Sacar al azar una ficha marcada con A o con C es $\frac{5}{7}$.

Probabilidad de eventos compuestos

Un **evento compuesto** es una combinación de dos o más eventos simples.

Dados dos eventos simples que no pueden ocurrir simultáneamente, la probabilidad del evento compuesto está determinada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ejemplo

Siguiendo con el ejemplo anterior:

- Sacar al azar una ficha marcada con A o con C es el resultado de la suma de la probabilidad de sacar A con la probabilidad de sacar B; esto es 5/7.

Hace predicciones sobre la posibilidad de ocurrencia de un evento compuesto e interpreta la predicción a partir del uso de propiedades básicas de la probabilidad.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 126 04/09/2023 11:59:10

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. ¿En qué situaciones se usa la probabilidad? ¿Para qué sirve la probabilidad?

2. Explica el significado de los siguientes términos.

a. *Suceso aleatorio.*

b. *Suceso determinista.*

c. *Espacio muestral.*

3. Determina si los siguientes experimentos son o no aleatorios. Justifica tu respuesta.

a. Lanzar una moneda 10 veces.

b. Determinar el ganador en una competencia.

c. Sacar un as en un juego de cartas.

Razonamiento

4. Para una rifa se elaboran boletas con los números del 1 al 100.

a. ¿Qué probabilidad de ganar la rifa tiene una persona que compra 5 boletas?

b. ¿Qué probabilidad existe de que el número ganador sea impar?

c. ¿Qué probabilidad existe de que el número ganador sea primo?

d. ¿Qué probabilidad existe de que el número ganador termine en 0?

Solución de problemas

5. Fernanda tiene en una bolsa con corazones de colores para regalar a sus amigos, 3 son amarillos, 4 son azules, 2 son rojos. Si saca un corazón al azar:

- Cuál es la probabilidad de:

$A=$ {obtener un corazón azul o amarillo}

$B=$ {obtener un corazón que no sea amarillo}

$C=$ {obtener un corazón rojo o azul}

$D=$ {obtener un corazón que no sea azul}

6. Si se selecciona una balota al azar entre 30 numeradas del 1 al 30. Halla la probabilidad de que al sacar una balota de la bolsa esta corresponda a:

$A=$ {Un número menor que 10}

$B=$ {Un número par}

$C=$ {Un número primo}

7. Un jugador lanza al aire dos dados no cargados.

Responde:

a. ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 8 o un 12?

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 10 o un 7?

8. Al girar una ruleta numerada con los números primos del 1 al 20:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número mayor que 5?

9. Del experimento: lanzar un dado de 6 caras numeradas del 1 al 6 y otro de 4 caras numeradas del 1 al 4, determina:

a. Espacio muestral.

b. Dos sucesos simples.

c. Dos sucesos compuestos.

10. Reúnete con tus compañeros de clase y escriban en tarjetas los nombres de cada uno, luego deposítenlas en una urna y determinen: Espacio muestral.

a. Dos sucesos simples.

b. Dos sucesos compuestos.

Responde:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar al alzar una tarjeta de la urna, esta contenga el nombre de una mujer?

Desempeño: Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 127 04/09/2023 11:59:10

Ecuaciones e inecuaciones con Geogebra

Aprendo

En el *software* Geogebra identifica el recuadro entrada en el cual se escriben las ecuaciones; la vista gráfica en donde se observa el plano cartesiano; la vista algebraica en donde se presentan los diferentes objetos que se utilizan en un determinado procedimiento.

Ecuaciones

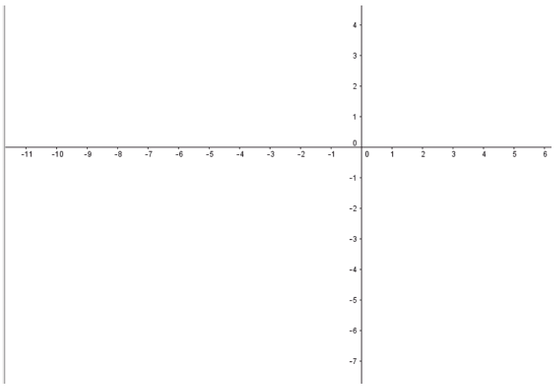
1. Resuelve la ecuación: $2x-1=4x+7$.
2. Escribe la ecuación $2x-1=4x+7$ en la *entrada* de ecuaciones en geogebra.
3. ¿Qué relación encuentras entre la línea que aparece en la vista gráfica y la solución que encontraste en el punto 1?
4. ¿Qué relación encuentras entre la expresión que aparece en la vista algebraica, la línea de la vista gráfica y la solución de la ecuación?

Por medio de Geogebra podemos hallar la solución de ecuaciones e inecuaciones gráficamente:

Obtener gráficamente la solución de la ecuación $2x-1=4x+7$.

Paso 1

Escribimos la ecuación $2x-1=2x+7$ en el recuadro *entrada*. Mientras se escribe la ecuación, aparece la gráfica instantáneamente.

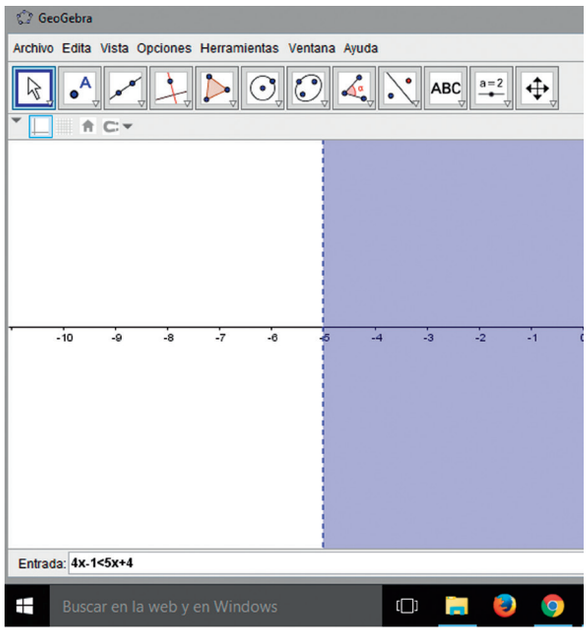


En la vista algebraica aparece el valor de x que hace cierta la igualdad, es decir, la solución de la ecuación.

Concluimos entonces que la solución a la ecuación es $2x-1=2x+7$ es $x=-4$

Inecuaciones

Obtener gráficamente la solución de la inecuación $4x-1<5x+4$

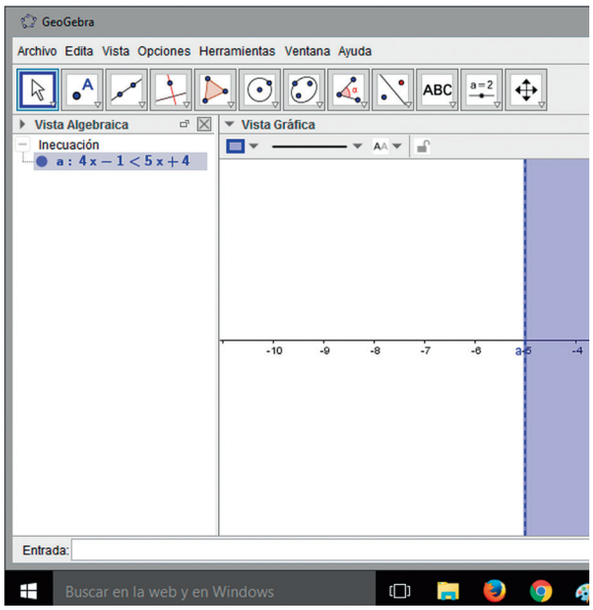


L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 128 04/09/2023 11:59:13

Paso 2

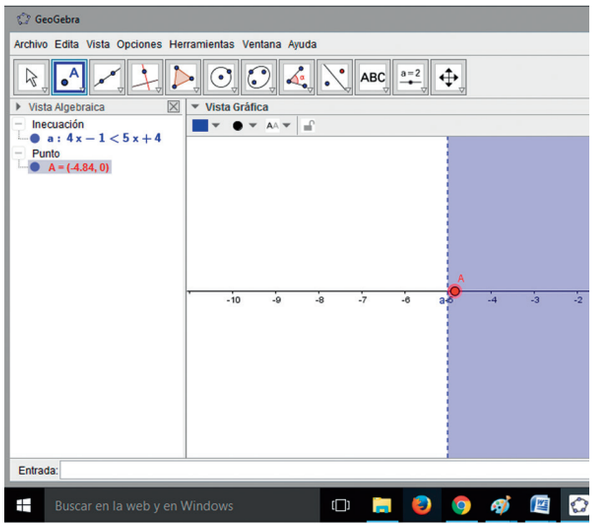
Escribimos la inecuación $4x-1<5x+4$ en el recuadro *entrada*. Mientras se escribe la inecuación, aparece la gráfica instantáneamente.

La región que aparece en color azul indica el intervalo que corresponde a la solución de la inecuación.



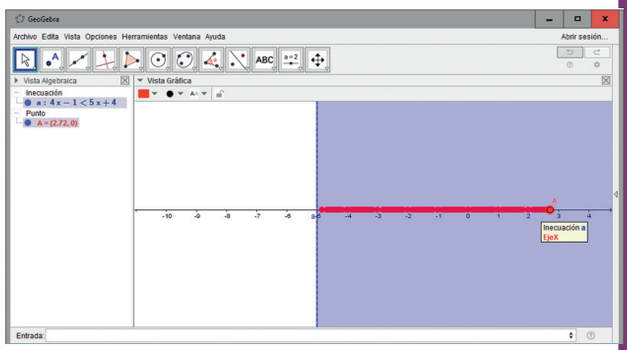
Paso 3

En la vista algebraica se puede verificar que la inecuación esté bien escrita.



Paso 4

La solución está determinada por el intervalo abierto $(-5,\infty)$, podemos utilizar la herramienta *punto* para insertar dicho objeto matemático y deslizarlo por el intervalo solución.



Finalmente, si se desea, se da clic derecho sobre la imagen y se puede utilizar la herramienta *rastro* que permite ver el rastro del punto mientras se desliza por el intervalo *solución*.

Practica y aplica

Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones utilizando Geogebra y escribe frente a cada una la solución o el intervalo *solución*.

Ecuación	Solución
a. $\frac{1}{4}x-5=x+7$	
b. $9x-3=x+5$	
c. $2(x+7)-2=1$	
d. $0=3x+4(2-x)$	

Inecuación	Intervalo Solución
a. $6x<24$	
b. $-8x>16$	
c. $3(x-11)+20<2x-5$	
d. $7(4+x)-2(x+6)>1$	

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 129 04/09/2023 11:59:16

Evaluación tipo Saber
y plan de mejoramiento

Comunicación

Resuelve las preguntas de la 1 a la 3 de acuerdo con la siguiente información:

La función que modela el costo de fabricación de un volumen de unidades de crayones está dada por $C(x) = 0.35x + 28$, donde x es el número de unidades producidas y $C(x)$ son los costos totales en quetzales.

1. Al representar la función en un plano cartesiano cuyos ejes horizontales y verticales son x y $C(x)$, se obtiene una recta inclinada que:

A. Corta al eje $C(x)$ en 0.35 porque ese es el costo de no producir ninguna unidad.
B. Corta al eje $C(x)$ en 28 porque ese es el costo cuando no se produce alguna unidad.
C. No corta al eje $C(x)$ porque se trata de una recta vertical, es decir, paralela al eje de costos.
D. No corta al eje $C(x)$ porque la recta no pasa por el punto de coordenadas (0; 0).

2. El valor 0.35 tiene un significado dentro del contexto de la situación planteada. Esta cantidad explica que:

A. Si se fabrican 28 crayones, el costo de cada uno de ellos es de Q. 0.50.
B. Si no se fabrican crayones se tienen costos iguales o superiores a Q. 30.00.
C. El costo de fabricar 35 crayones es de Q. 3,000.00, porque 0.35 × 100= 35 y 30 × 100= 3,000.
D. El costo de fabricar cada crayón es de Q. 0.35, independientemente de la cantidad producida.

3. Debido a que el modelo de la función de costo es de tipo afín, esperamos que siempre una

A. cantidad igual de unidades fabricadas genere un mismo costo.
B. cantidad de unidades fabricadas genere menos costo cuantas más unidades se fabriquen.
C. determinada cantidad de unidades mayor a 28 genere un costo de Q. 0.35 por unidad.
D. determinada cantidad de unidades menor a 28 genere un costo de Q. 0.35 por unidad.

4. Si la pendiente de una recta es 0, significa que esta es

A. paralela al eje X.
B. paralela al eje Y.
C. pasa por el origen.
D. no se puede graficar.

5. La gráfica de la ecuación x = –3

A. es paralela al eje X.
B. es paralela al eje Y.
C. tiene pendiente positiva.
D. tiene pendiente negativa.

6. Un tanque de 1 m de alto, 90 cm de ancho y 1,20 m de largo contiene 534 l de agua, ¿cuánta cantidad de agua debe tener en total para estar completamente lleno?

A. 549 l
B. 536 l
C. 556 l
D. 546 l

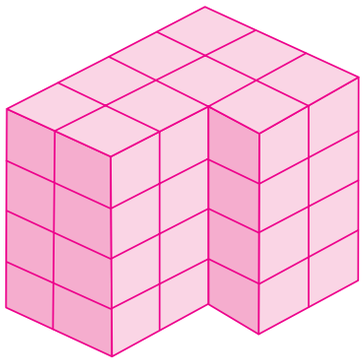
7. Un tanque de 25 dm de largo, 15 dm de ancho y 18 dm de altura y que está tres cuartas partes lleno, ¿cuánto tiempo se tarda en llenar

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 130 04/09/2023 11:59:23

completamente con un grifo que vierte 50 litros de agua por minuto?

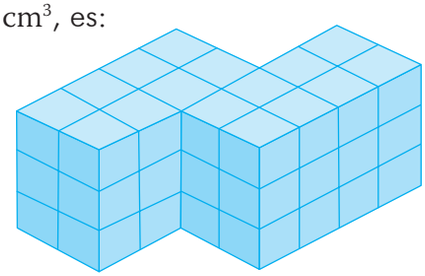
A. 40 min
B. 45 min
C. 47 min
D. 42 min

8. Si el volumen de cada unidad cúbica es 1 cm^3, ¿cuál es el volumen del sólido de la imagen?



A. 10 cm^3
B. 40 cm^3
C. 20 cm^3
D. 80 cm^3

9. El conteo de unidades cúbicas de este sólido, asumiendo que cada unidad representa 1 cm^3, es:



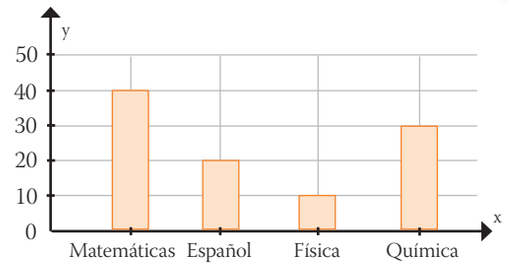
A. 16 cm^3
B. 48 cm^3
C. 32 cm^3
D. 40 cm^3

10. Observa la siguiente caja decorativa y define cuántas caras, vértices y aristas tiene:



A. 2 caras, 6 vértices, 12 aristas.
B. 6 caras, 8 vértices, 12 aristas.
C. 8 caras, 6 vértices, 18 aristas.
D. 8 caras, 12 vértices, 18 aristas.

10. En el siguiente diagrama se registra el número de estudiantes que aprobaron Matemáticas, Español, Física y Química.



De acuerdo a este, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?:

A. El número de estudiantes que aprobaron Química es el doble de aquellos que aprobaron Matemáticas, y la asignatura con mejores resultados fue Química.
B. El número de estudiantes que aprobaron Física es la mitad de aquellos que aprobaron Español.
C. El número de estudiantes que aprobaron Física es el doble de aquellos que aprobaron Matemáticas, y la asignatura en la que reprobaron la mayor cantidad de estudiantes fue Química.
D. La cantidad de estudiantes que aprobaron Física y Matemáticas es la misma.

Se pregunta en un salón de clases la fruta favorita de 29 niños:

Fruta	Frecuencia
Manzana	4
Fresa	8
Durazno	6
Naranja	5
Melón	6

11. ¿Cuál es la media?

A. 4,6
B. 5,8
C. 5
D. 4

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 131 04/09/2023 11:59:24

Bibliografía

BELTRÁN, L. P. B., SÁENZ, B. P. R., & CASTELLANOS, M. S. D. (1996). Matemáticas con tecnología aplicada 8. Prentice Hall de Colombia.Benjamin P., Rodriguez S.

CENTENO, G. (1994). Matemática constructiva 8. Libros y Libres.

http://www.who.int/topics/nutrition/es/ Organización mundial de la salud – nutrición. Consultado el 15 de agosto de 2016

http://www.ecologistasenaccion.org/article28277. html.Las bolsas de plástico contaminan y no son necesarias. Consultado el 20 de agosto de 2016

http://www.eltiempo.com/estilo-de-vida/ciencia/colombia-reduccion-del-consumo-de-bolsas-plasticas/16565569 ¿Sabe el daño que causan sus bolsas de plástico al planeta? Consultado el 20 de agosto de 2016

MENA, J. S., CONCHA, R. H., & SATELER, F. R. (2006). Matemática.

SALAMANCA, M.; RODRÍGUEZ, M.; CRUZ, J.; OVALLE, R.; PULIDO, M.; MOLANO A. (2016). Guía para la implementación de la Cátedra de la Paz. Editorial Santillana S.A.S. Bogotá D.C.

RAMIREZ, M. A. M. Los caminos del saber Matemáticas 8.

SANTILLANA & PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA. (2016). Bibliografía. En Santillana & Pontificia Universidad Javeriana, Guía para la implementación de la catedra de la paz. Bogotá, D. C., Colombia: Editorial Santillana S. A.

SANTILLANA & PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA. (2016). Guía para la implementación de la catedra de la paz. Bogotá, D. C., Colombia: Editorial Santillana S. A. S.

PARRA R, FERNANDO A., (2008) Matemática-mente 8. Educación Básica. Editorial Voluntad.

YUSTE, F. C. (1994). Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato. Síntesis.

L8_Unidad_4_2021 Indiv.indd 132 04/09/2023 11:59:24