Intégralo

Matemáticas

9



Comunicación y Lenguaje

Ciencias Sociales

Matemáticas

Ciencias Naturales

PIEDRASANTA

educar

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 1 04/09/2023 14:33:02

Intégralo Matemáticas es una obra colectiva concebida, diseñada y creada por el departamento editorial del Grupo Editorial Educar S.A. a partir del fondo editorial del grupo Educar, bajo la dirección de Luz Dary Hemelberg Rojas.

DESARROLLO DE CONTENIDOS

Matemáticas

Ángel Ramiro González Monroy, Arelis Silva Buitrago, Alexander Moreno Quiroga, Jenny Alexandra Mejía Osorio, Fabián Orlando Bogotá Riveros, Carlos Alberto Forero Toro, Rafael Felipe Chaves Escobar, Valentín Castellanos Almeida, Martha Patricia Barrios Rodríguez, Wilmer Beltrán Tarazona, Jenny Andrea Monroy Mendoza

Contextualizadores para Guatemala: Pedro Ernesto Gálvez Sinibaldi
Autoría de Historia, Geografía y Formación Ciudadana: Irene Piedrasanta
Autoría de Expresión artística: Yesenia Hernández Esteban
Coordinación de contextualización y recopilación de proyectos Guatemala: Daniel Caciá

Equipo Editorial

Dirección general editorial: Luz Dary Hemelberg Rojas
Editores: Alejandra Suárez, Gloria Mora, Andrea González, Jorge Galindo Rodríguez, Rafael Oliver, Natalia Bahamón, Ana María Archila, Esteban Forero, Liliana Ortiz F., Edgar Josué Malagón, Luisa Esperanza Rincón
Revisión técnica: Héctor Manuel Sarmiento Gordillo, Erika Yised González Urueña, Ángela María Martínez Simbaqueba, William Mauricio Buitrago Parra, León Andrés Montoya Arias
Revisión técnica, equidad de género y adecuación a la diversidad cultural:
Manuel Neftalí Riveros Grajales, Freddery Esneider Hernández Lugo
Editores de calidad: María Claudia Torres Gil, Sergio Muñoz, Clara Galindo, Cindy Roa Devia, Nhora Parra.
Corrección de estilo: María Angélica Fonseca L, Alexandra Ávila Santana, Cinthya Quintero, Egna Libi Márquez Lancheros, María José Díaz Granados, Alejandro Cuervo Bojacá, Carolina Salazar Mora, Beatriz Román Campos, Leonor Fonseca, Orlando Bermúdez, Karen Grisales, Laura Santamaría Holguín
Coordinador de diseño: Edison Andrés Quiñones Jiménez
Diseño: Magda Lorena Morales Sánchez
Diseño de carátula, diseño de páginas interiores: Sthefania Quintero, Ana María Páez, Claudia Paola González Rodríguez, Edison Quiñones
Diagramación: Edison Quiñones, Zulma Hendez, Miguel Guzmán, Iván Ramirez, Sthefania Quintero, Evely López, Claudia Gonzalez, Mayerlini Bohorquez, Cristina Galindo, Victor Gómez, Magda Morales, Nórida Ramírez, Fabián Alberto Alba Pereira, Diego Javier Reyes D., Fabby Albeiro Torres Velásquez, María Cristina Galindo, Jenny Paola Sánchez Gómez, Adriana Páez, Zulma Useche, Stella Mora, Fabby Albeiro Torres Velásquez, Ana María Melo, Adriana Patricia Páez, Melany Janeth Martínez, Ana María Páez
Documentación: Nelson Mendoza, Natalia Herrera Farfán, Agustín Mena, Jorge Rodríguez.
Apoyo documentación gráfica: Jenny Dorado, María Ceballos
Laboratorio: Colegio Santa Luisa, Bogotá. Beryeni Rodríguez (Rectora), Yamile Monsalve (Subdirectora Académica), Lizeth Bernal (Licenciada en Biología)
Producción: Fabby Albeiro Torres Velásquez

© 2023 Educar Editores S. A.

ISBN libro: 978-958-05-2278-2

Primera impresión 2024

Depósito legal en trámite

Autopista Medellín km 3.4 - Vía Bogotá - Siberia, Centro Empresarial Metropolitano - Edificio CEN Piso 4. Bogotá, D. C., Colombia. PBX: 8 764300 www.educar.com.co - Facebook: Grupo Editorial Educar - Twitter: @EducarEditores

Impreso en Guatemala

Todos los derechos reservados. Esta obra no puede ser reproducida, ni archivada o transmitida total o parcialmente por medio alguno sin autorización escrita de la Editorial.

Intégralo cuatro áreas es una propuesta pedagógica del **Grupo Editorial Educar** y de la **Editorial Piedrasanta** para los grados de secundaria, que incluye la posibilidad de que se armen los integrados de acuerdo con las áreas de interés de cada institución, en un sólo texto, las cuatro áreas básicas.

- **Comunicación y Lenguaje**
- **Matemáticas**
- **Ciencias Naturales**
- **Ciencias Sociales**

Comunicación y Lenguaje



En esta área, los contenidos y las actividades están orientados a desarrollar en los estudiantes competencias para:

- Expresarse correctamente con el fin de comunicar ideas, sentimientos y opiniones e interactuar con otros seres de su entorno.
- Comprender y producir textos verbales y no verbales que respondan a diferentes situaciones de comunicación.
- Participar de manera constructiva y crítica en cualquier contexto comunicativo.

Matemáticas



En esta área, los contenidos y las actividades están orientados a desarrollar en los estudiantes competencias para:

- Manejar procedimientos y algoritmos matemáticos, y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos.
- Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana.
- Utilizar diferentes registros de representación y sistemas de datos para expresar ideas matemáticas.

Ciencias Naturales



En esta área, los contenidos y las actividades están orientados a desarrollar en los estudiantes competencias para:

- Conocer, valorar y cuidar el entorno natural.
- Formar parte activa y responsable en la conservación del planeta.
- Aproximarse al conocimiento científico mediante la observación de diferentes fenómenos del entorno.

Ciencias Sociales



En esta área, los contenidos y las actividades están orientados a desarrollar en los estudiantes competencias para:

- Apropiarse de los conceptos propios del área para comprender la realidad.
- Interpretar y comprender hechos sociales con el fin de promover la convivencia pacífica.
- Asumir una posición crítica y ética frente a las injusticias sociales.

Conoce tu libro de Matemáticas

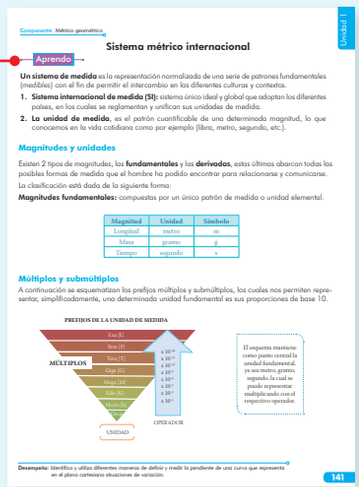
Matemáticas posibilita el desarrollo de aprendizajes significativos para ser **matemáticamente competentes**.

El bloque de matemáticas está organizado en cuatro **unidades**. Cada unidad incluye las siguientes secciones:

Aprendo

Sección Enmarcada dentro del saber y saber hacer. Se realiza el desarrollo temático desde los Estándares Básicos de Aprendizaje (EBA), los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y los componentes del área. Incluye la explicación y ejercicios de modelamiento (paso a paso).

- ✓ **Pensamiento numérico-variacional**
- ✓ **Pensamiento métrico-espacial**
- ✓ **Pensamiento aleatorio**


Componente: Métrico geométrico

Unidad 1

Sistema métrico internacional

Aprendo

Un sistema de medida es la representación normalizada de una serie de patrones fundamentales (medibles) con el fin de permitir el intercambio en las diferentes culturas y contextos.

1. **Sistema internacional de medida (SI):** sistema único ideal y global que adoptan los diferentes países, en los cuales se reglamentan y unifican sus unidades de medida.
2. **La unidad de medida**, es el patrón cuantificable de una determinada magnitud, lo que conocemos en la vida cotidiana como por ejemplo (libra, metro, segundo, etc.).

Magnitudes y unidades

Existen 2 tipos de magnitudes, las **fundamentales** y las **derivadas**, estas últimas abarcan todas las posibles formas de medida que el hombre ha podido encontrar para relacionarse y comunicarse.

La clasificación está dada de la siguiente forma:

Magnitudes fundamentales: compuestas por un único patrón de medida o unidad elemental.

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	gramo	g
Tiempo	segundo	s

Múltiplos y submúltiplos

A continuación se esquematizan los prefijos múltiplos y submúltiplos, los cuales nos permiten representar, simplificadamente, una determinada unidad fundamental es sus proporciones de base 10.

PREFIJOS DE LA UNIDAD DE MEDIDA

MÚLTIPLOS

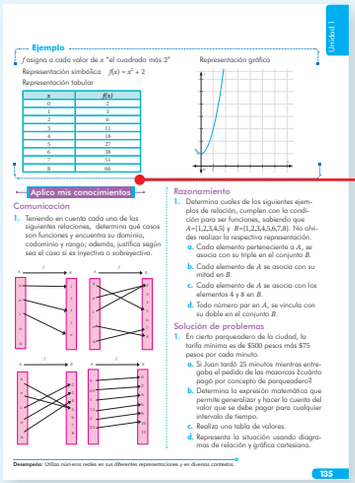
UNIDAD

OPERADOR

El esquema mantiene como punto central la unidad fundamental, ya sea metro, gramo, segundo, la cual se puede representar multiplicando con el respectivo operador.

Desempeño: Identifica y utiliza diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

141


Unidad 1

Ejemplo

f asigna a cada valor de x "el cuadrado más 2"

Representación simbólica $f(x) = x^2 + 2$

Representación tabular

x	$f(x)$
0	2
1	3
2	6
3	11
4	18
5	27
6	38
7	51
8	66

Representación gráfica

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Teniendo en cuenta cada una de las siguientes relaciones, determina qué casos son funciones y encuentra su dominio, codominio y rango; además, justifica según sea el caso si es inyectiva o sobreyectiva.

Razonamiento

1. Determina cuales de los siguientes ejemplos de relación, cumplen con la condición para ser funciones, sabiendo que $A=\{1,2,3,4,5\}$ y $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. No olvides realizar la respectiva representación.
   a. Cada elemento perteneciente a A, se asocia con su triple en el conjunto B.
   b. Cada elemento de A se asocia con su mitad en B.
   c. Cada elemento de A se asocia con los elementos 4 y 8 en B.
   d. Todo número par en A, se vincula con su doble en el conjunto B.

Solución de problemas

1. En cierto parqueadero de la ciudad, la tarifa mínima es de $500 pesos más $75 pesos por cada minuto.
   a. Si Juan tardó 25 minutos mientras entregaba el pedido de las mazorcas ¿cuánto pagó por concepto de parqueadero?
   b. Determina la expresión matemática que permite generalizar y hacer la cuenta del valor que se debe pagar para cualquier intervalo de tiempo.
   c. Realiza una tabla de valores.
   d. Representa la situación usando diagrama de relación y gráfica cartesiana.

Desempeño: Utiliza números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

135

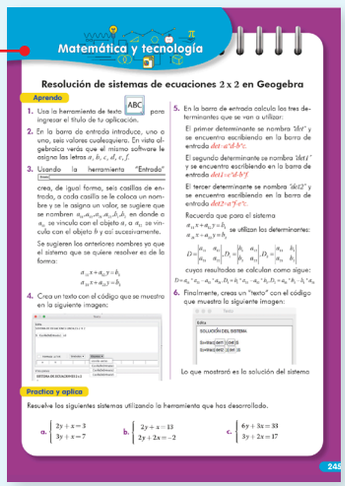
Aplico mis conocimientos

Incluye actividades y preguntas enfocadas a desarrollar las competencias para bachillerato que evalúa la prueba Saber. Es un espacio para que los estudiantes practiquen las competencias de los saberes aprendidos mediante actividades significativas de **comunicación**, **razonamiento** y **solución de problemas**.

Matemáticas y tecnología

En esta sección se trabaja la matemática aplicada a la tecnología que se utiliza en la vida cotidiana; dispositivos o programas que nos permiten aplicar la teoría vista en todo el bloque.

- ✓ **Aprendo**
- ✓ **Practico y aplico**


Matemática y tecnología

Resolución de sistemas de ecuaciones 2 x 2 en Geogebra

Aprendo

1. Usa la herramienta de texto ABC para ingresar el título de tu aplicación.
2. En la barra de entrada introduce, uno a uno, seis valores cualesquiera. En vista algebraica verás que el mismo software le asigna las letras a, b, c, d, e, f.
3. Usando la herramienta "Entrada" crea, de igual forma, seis casillas de entrada, a cada casilla se le coloca un nombre y se le asigna un valor, se sugiere que se nombren $a_{11}, a_{12}, a_{21}, A, B$, en donde a_{11} se vincula con el objeto a, a a_{12} se vincula con el objeto b y así sucesivamente.

   Se sugieren los anteriores nombres ya que el sistema que se quiere resolver es de la forma:

   $$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = A \\ a_{21}x + a_{22}y = B \end{cases}$$

4. Crea un texto con el código que se muestra en la siguiente imagen:
5. En la barra de entrada calcula los tres determinantes que se van a utilizar:

   El primer determinante se nombra "det" y se encuentra escribiendo en la barra de entrada $det\ a*d-b*c$.

   El segundo determinante se nombra "det1" y se encuentra escribiendo en la barra de entrada $det1\ c*d-b*f$.

   El tercer determinante se nombra "det2" y se encuentra escribiendo en la barra de entrada $det2\ a*f-c*e$.

   Recuerda que para el sistema $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = A \\ a_{21}x + a_{22}y = B \end{cases}$ se utilizan los determinantes:

   $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} A & a_{12} \\ B & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & A \\ a_{21} & B \end{vmatrix}$$

   cuyos resultados se calculan como sigue:

   $$D = a_{11}*a_{22} - a_{21}*a_{12}, D_1 = A*a_{22} - a_{21}*B, D_2 = a_{11}*B - A*a_{21}$$

6. Finalmente, crea un "texto" con el código que muestra la siguiente imagen:

   Lo que mostrará es la solución del sistema

Practica y aplica

Resuelve los siguientes sistemas utilizando la herramienta que has desarrollado.

a. $\begin{cases} 2y + x = 3 \\ 3y + x = 7 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2y + x = 13 \\ 2y + 2x = -2 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 6y + 3x = 33 \\ 3y + 2x = 17 \end{cases}$

245

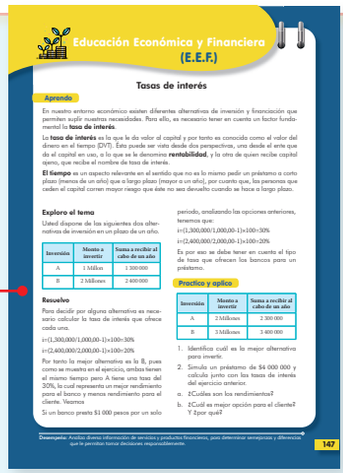
L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 4 04/09/2023 14:33:06

Educación Económica y Financiera

En nuestra serie es un espacio para que los estudiantes mejoren su comprensión de los conceptos, los riesgos y los productos y servicios financieros, y desarrollan las habilidades y la confianza para ser más conscientes de los riesgos financieros y de las oportunidades, y así tomar decisiones financieras informadas para mejorar su bienestar (OECD, 2005).

✓ **Aprendo**

✓ **Practico y aplico**


Educación Económica y Financiera (E.E.F.)

Tasas de interés

Aprendo

En nuestro entorno económico existen diferentes alternativas de inversión y financiación que permiten suplir nuestras necesidades. Para ello, es necesario tener en cuenta un factor fundamental la **tasa de interés**.

La **tasa de interés** es la que le da valor al capital y por tanto es conocida como el valor del dinero en el tiempo (DVT). Esta puede ser vista desde dos perspectivas, una desde el ente que da el capital en uso, a la que se le denomina **rentabilidad**, y la otra de quien recibe capital ajeno, que recibe el nombre de tasa de interés.

El tiempo es un aspecto relevante en el sentido que no es lo mismo pedir un préstamo a corto plazo (menos de un año) que a largo plazo (mayor a un año), por cuanto que, las personas que ceden el capital corren mayor riesgo que éste no sea devuelto cuando se hace a largo plazo.

Explora el tema

Usted dispone de los siguientes dos alternativas de inversión en un plazo de un año.

Inversión	Monto a invertir	Suma a recibir al cabo de un año
A	1 Millón	1 300 000
B	2 Millones	2 400 000

Resuelvo

Para decidir por alguna alternativa es necesario calcular la tasa de interés que ofrece cada una.

$i=(1,300,000/1,000,00-1)\times100=30\%$

$i=(2,400,000/2,000,00-1)\times100=20\%$

Por tanto la mejor alternativa es la B, pues como se muestra en el ejercicio, ambas tienen el mismo tiempo pero A tiene una tasa del 30%, la cual representa un mejor rendimiento para el banco y menos rendimiento para el cliente. Veamos

Si un banco presta $1 000 pesos por un solo periodo, analizando las opciones anteriores, tenemos que:

$i=(1,300,000/1,000,00-1)\times100=30\%$

$i=(2,400,000/2,000,00-1)\times100=20\%$

Es por eso se debe tener en cuenta el tipo de tasa que ofrecen los bancos para un préstamo.

Practico y aplico

Inversión	Monto a invertir	Suma a recibir al cabo de un año
A	2 Millones	2 300 000
B	3 Millones	3 600 000

1. Identifica cuál es la mejor alternativa para invertir.
2. Simula un préstamo de $4 000 000 y calcula junto con las tasas de interés del ejercicio anterior.
   a. ¿Cuáles son los rendimientos?
   b. ¿Cuál es mejor opción para el cliente? Y ¿por qué?

Desempeño: Analiza diversa información de servicios y productos financieros, para determinar semejanzas y diferencias que le permitan tomar decisiones responsablemente.

147

Evaluación tipo Saber

La evaluación tipo Saber aparece en todas las unidades. Se realizan preguntas que ayudan a los estudiantes a fortalecer las competencias y habilidades que evalúa la prueba nacional sobre los temas vistos en cada unidad.

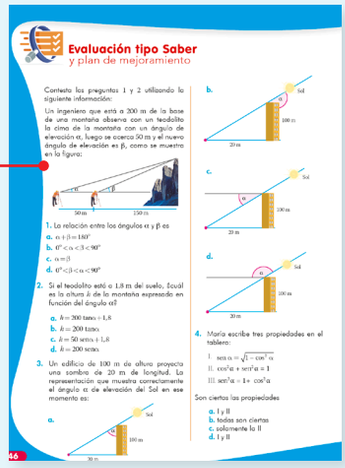

Evaluación tipo Saber

1. De acuerdo con la composición de los conjuntos numéricos, determina la respuesta **correcta:**
   a. Todo número real es entero.
   b. Todo número entero es real.
   c. Ningún número entero es racional.
   d. Ningún número real es racional.
2. Determina la respuesta **incorrecta**
   a. Cualquier entero es racional.
   b. Ningún complejo es real.
   c. Los números complejos son conformados por parte real e imaginaria.
3. Teniendo en cuenta las propiedades de la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación de los números reales, se puede afirmar que
   a. $r^2 \times r^3 = r^5$.
   b. $(a+c)^2 = a^2 + c^2$.
   c. $70 = 7$.
   d. $3^2 \times 5^2 = 8^4$.
4. Teniendo en cuenta las propiedades de la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación de los números reales, sería **falso** afirmar que
   a. $6^2 - 6^1 = 6^5$.
   b. $125 \times 25 = 5^5$.
   c. $321234^2 \times 321234^1 = 0$.
   d. $3^2 \times 4^2 = 5^2$.
5. Una forma de descomponer el número 2 560 000 en multiplicación de potencias de números puede ser escrita de la siguiente manera:
   a. 2×10^{10}.
   c. 2.56×10^6.
   b. 652×10^2.
   d. 25.6×20^{17}.
6. Determina en cada caso si la función corresponde a una función lineal o afín:
   $f(x) = -3x$
   $f(x) = 4x + 5$
   $f(x) = -5x - 1$
   a. Afín, lineal, afín
   b. Lineal, afín, lineal
   c. Lineal, afín, afín
   d. Afín, lineal, lineal
7. Un carro recorre en promedio 75Km/h. Teniendo en cuenta que x: distancia recorrida y t: tiempo. La expresión que relaciona el tiempo y la distancia recorrida es:
   a. $d = 75t$
   b. $t = 75d$
   c. $d = \frac{75}{t}$
   d. $t = \frac{75}{d}$
8. De acuerdo con las propiedades de la radicación, se podría afirmar que:
   a. $\sqrt{ac+c} = \sqrt{a} \times \sqrt{c}$.
   c. $\sqrt{32} + \sqrt{32} + \sqrt{32}$.
   b. $\sqrt[3]{r^3+s} = \sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{s}$.
   d. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$.
9. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}$, se obtiene como resultado
   a. $\frac{36}{15}$
   c. $3\times(\sqrt{3}-\sqrt{3})$.
   b. $6\sqrt{3}+3$.
   d. $\sqrt{4}$.
10. Si se tiene $5+3y9+2i$, ¿cuál es la respuesta de $(5+3i)+(9+2i)$ y de $(5+3i)\times(9+2i)$ correspondientemente?
    a. $(86+11i)$ y $88i$.
    b. No hay respuesta.
    c. $(7+12i)$ y $(15+18i)$.
    d. $(14+5i)$ y $(45-6)+(108+27i)$.

148

Plan de mejoramiento

Es una sección que recoge preguntas sobre las temáticas complejas vistas en las anteriores unidades. Se presenta únicamente en la Unidad final de cada área del conocimiento.


Evaluación tipo Saber y plan de mejoramiento

Contesta las preguntas 1 y 2 utilizando la siguiente información:

Un ingeniero que está a 300 m de la base de una montaña observa con un teodolito la cima de la montaña con un ángulo de elevación α, luego se acerca 50 m y el nuevo ángulo de elevación es β, como se muestra en la figura:

1. La relación entre los ángulos α y β es
   a. $\alpha+\beta=180^\circ$
   b. $0^\circ<\alpha<\beta<90^\circ$
   c. $\alpha=\beta$
   d. $0^\circ<\beta<\alpha<90^\circ$
2. Si el teodolito está a 1.8 m del suelo, ¿cuál es la altura h de la montaña expresado en función del ángulo α?
   a. $h=300\tan\alpha+1.8$
   b. $h=200\tan\alpha$
   c. $h=50\operatorname{sen}\alpha+1.8$
   d. $h=200\operatorname{sen}\alpha$
3. Un edificio de 100 m de altura proyecta una sombra de 29 m de longitud. La representación que muestra correctamente el ángulo α de elevación del Sol en ese momento es:

4. María escribe tres propiedades en el tablero:
   I. $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
   II. $\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1$
   III. $\operatorname{sen}^2\alpha=1+\cos^2\alpha$

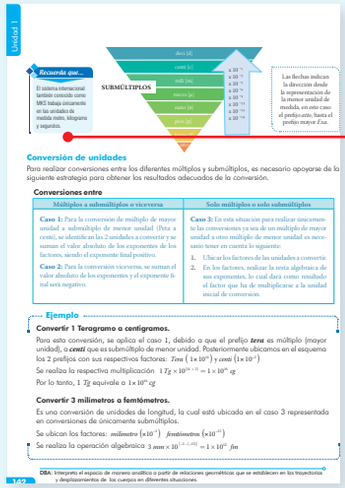
   Son ciertas las propiedades
   a. I y II
   b. todas son ciertas
   c. solamente la II
   d. I y II

46

Ladillos

Ideas clave...

Encuentran breves explicaciones del tema que se está tratando: propiedades y leyes que refuerzan el conocimiento.


Unidad 1

Recuerda que...

El sistema internacional también conocido como MKS trabaja únicamente en las unidades de medida metro, kilogramo y segundos.

SUBMÚLTIPLOS

deci [d] $\times 10^{-1}$
centi [c] $\times 10^{-2}$
mili [m] $\times 10^{-3}$
micro [μ] $\times 10^{-6}$
nano [n] $\times 10^{-9}$
pico [p] $\times 10^{-12}$
femto [f] $\times 10^{-15}$
atto [a] $\times 10^{-18}$

Las flechas indican la dirección desde la representación de la menor unidad de medida, en este caso el prefijo-atto, hasta el prefijo mayor Exa.

Conversión de unidades

Para realizar conversiones entre los diferentes múltiplos y submúltiplos, es necesario apoyarse de la siguiente estrategia para obtener los resultados adecuados de la conversión.

Conversiones entre

Múltiplos a submúltiplos o viceversa	Solo múltiplos o solo submúltiplos
Caso 1: Para la conversión de múltiplo de mayor unidad a submúltiplo de menor unidad (Peta a centi), se identifican las 2 unidades a convertir y se suman el valor absoluto de los exponentes de los factores, siendo el exponente final positivo.	**Caso 3:** En esta situación para realizar únicamente las conversiones ya sea de un múltiplo de mayor unidad a otro múltiplo de menor unidad es necesario tener en cuenta lo siguiente: 1. Ubicar los factores de las unidades a convertir. 2. En los factores, realizar la resta algebraica de sus exponentes, lo cual dará como resultado el factor que ha de multiplicarse a la unidad inicial de conversión.
Caso 2: Para la conversión viceversa, se suman el valor absoluto de los exponentes y el exponente final será negativo.	

Ejemplo

Convertir 1 Teragramo a centigramos.

Para esta conversión, se aplica el caso 1, debido a que el prefijo ***tera*** es múltiplo (mayor unidad), a ***centi*** que es submúltiplo de menor unidad. Posteriormente ubicamos en el esquema los 2 prefijos con sus respectivos factores: *Tera* $\left(1\times10^{12}\right)$ y *centi* $\left(1\times10^{-2}\right)$

Se realiza la respectiva multiplicación $1\,Tg\times10^{12-(-2)}=1\times10^{14}\,cg$

Por lo tanto, $1\,Tg$ equivale a $1\times10^{14}\,cg$

Convertir 3 milímetros a femtómetros.

Es una conversión de unidades de longitud, la cual está ubicada en el caso 3 representada en conversiones de únicamente submúltiplos.

Se ubican los factores: *milímetro* $\left(\times10^{-3}\right)$ *femtómetros* $\left(\times10^{-15}\right)$

Se realiza la operación algebraica $3\,mm\times10^{(-3)-(-15)}=1\times10^{12}\,fm$

DBA: Interpreta el espacio de manera analítica a partir de relaciones geométricas que se establecen en las trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones.

142

Recuerda que...

Presenta tips cortos del tema que se está tratando para ver la explicación de otra manera y tener dos visiones del mismo tema.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 5 04/09/2023 14:33:08

Contenido

UNIDAD 1

Función lineal, sistema métrico y estadística

¿Qué aprenderé? 8

Pensamiento Numérico y Variacional

El conjunto de los números reales 9
Aplico mis conocimientos 13
Recta real 14
Aplico mis conocimientos 16
Potenciación y radicación 17
Aplico mis conocimientos 21
Números complejos 22
Aplico mis conocimientos 24
Ecuación lineal 25
Aplico mis conocimientos 26
Relaciones y funciones 27
Aplico mis conocimientos 29
Función lineal y ecuación general de la rectal 30
Aplico mis conocimientos 32
Aplicaciones de la función lineal 33
Aplico mis conocimientos 34

Pensamiento Métrico y geométrico

Sistema métrico internacional 35
Aplico mis conocimientos 37

Pensamiento Aleatorio

Medidas de tendencia central y no central para datos agrupados 38
Aplico mis conocimientos 40

Educación Económica y Financiera

Tasas de interés 41
Evaluación tipo Saber 42

UNIDAD 2

Sistemas de ecuaciones, unidades y gráficas

¿Qué aprenderé? 44

Pensamiento Numérico y Variacional

Planteamiento de sistemas de ecuaciones 45
Aplico mis conocimientos 46
Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2 × 2 47
Aplico mis conocimientos 50
Sistemas de ecuaciones lineales de 3 × 3 51
Aplico mis conocimientos 54
Matrices 55
Aplico mis conocimientos 56
Operaciones entre matrices 57
Aplico mis conocimientos 59
Determinantes 60
Aplico mis conocimientos 61
Solución de sistemas de ecuaciones lineales empleando álgebra matricial 62
Aplico mis conocimientos 64
Matriz inversa 65
Aplico mis conocimientos 66
Sistemas de inecuaciones 67
Aplico mis conocimientos 69

Pensamiento Métrico y geométrico

Conversión de unidades 70
Aplico mis conocimientos 72

Pensamiento Aleatorio

Análisis de gráficas estadísticas 73
Aplico mis conocimientos 74

Educación Económica y Financiera

La inflación 75
Evaluación tipo Saber 76

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 6 04/09/2023 14:33:08

UNIDAD 3

Funciones trascendentes, polígonos y conteo

¿Qué aprenderé? ... 78

Pensamiento Numérico y Variacional

Función cuadrática ... 79
Aplico mis conocimientos ... 81
Ecuación cuadrática ... 82
Aplico mis conocimientos ... 85
Ecuaciones reducibles a ecuaciones cuadráticas ... 86
Aplico mis conocimientos ... 88
Desigualdades cuadráticas ... 89
Aplico mis conocimientos ... 91
Aplicaciones de la función cuadrática ... 92
Aplico mis conocimientos ... 93
Progresiones aritméticas ... 94
Aplico mis conocimientos ... 95
Progresiones geométricas ... 96
Aplico mis conocimientos ... 97
Función exponencial ... 98
Aplico mis conocimientos ... 100
Función logarítmica ... 101
Aplico mis conocimientos ... 103
Función raíz ... 104
Aplico mis conocimientos ... 105
Usos y aplicaciones de las funciones trascendentes ... 106
Aplico mis conocimientos ... 107

Pensamiento Métrico y geométrico

Polígonos ... 108
Aplico mis conocimientos ... 112

Pensamiento Aleatorio

Técnicas de conteo ... 113
Aplico mis conocimientos ... 114

Educación Económica y Financiera

Inversión ... 115
Evaluación tipo Saber ... 116

UNIDAD 4

Trigonometría básica, sólidos y probabilidad

¿Qué aprenderé? ... 118

Pensamiento Numérico y Variacional

Medida de ángulos ... 119
Aplico mis conocimientos ... 122
Razones trigonométricas en triángulos rectángulos ... 123
Aplico mis conocimientos ... 124
Razones trigonométricas de ángulos notables ... 125
Aplico mis conocimientos ... 127
Relaciones entre razones trigonométricas ... 128
Aplico mis conocimientos ... 129
Resolución de triángulos rectángulos ... 130
Aplico mis conocimientos ... 131

Pensamiento Métrico y geométrico

Cuerpos geométricos ... 132
Aplico mis conocimientos ... 136

Pensamiento Aleatorio

Probabilidad ... 137
Aplico mis conocimientos ... 138

Matemática y tecnología

Resolución de ecuaciones 2 x 2 en Geogebra ... 139
Evaluación tipo Saber y plan de mejoramiento ... 140
Bibliografía ... 142

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 7 04/09/2023 14:33:08

Unidad 1

Función lineal, sistema métrico y estadística

¿Qué aprenderé?

- Los números reales y complejos
- Sistema métrico internacional
- Medidas de tendencia central para datos agrupados

¿Qué lograré?

- ✔ Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
- ✔ Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.
- ✔ Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.



El conjunto de los números reales

Aprendo

Números enteros

Los **números enteros** son la unión de los números **naturales** $\mathbb{N}$, los números **opuestos** o **negativos** y el **cero**.

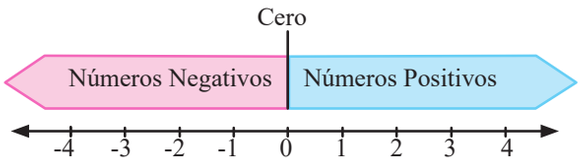
$\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de los números enteros y se simboliza con una $\mathbb{Z}$

Una representación física de los números enteros se da en las líneas de tiempo, también en la ubicación espacial de un plano o mapa y de las altitudes como lo que se encuentra sobre el mar y debajo de él.

Propiedades más importantes:

- $\mathbb{Z}$ no tiene primer ni último término y cada número entero tiene un antecesor y un sucesor.
- Todo número entero a tiene su opuesto $-a$, tal que $a + (-a) = 0$
- Al realizar las operaciones de suma, resta y multiplicación entre números enteros, da como resultado un número entero.

Todos los números positivos empiezan desde el número 1 y continúan hacia la derecha, los números negativos empiezan con el -1 y continúan hacia la izquierda como se ve en el siguiente gráfico:



Números racionales

Los **números racionales** son el conjunto de todos los cocientes de dos enteros a y b : $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ con $b \neq 0$.

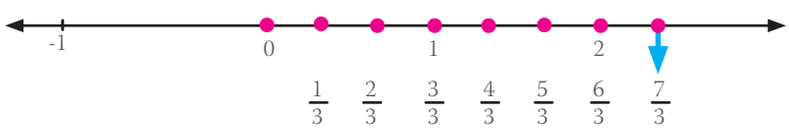
Los **números racionales limitados** son aquellos cuya representación decimal tiene un número determinado y fijo de cifras, por ejemplo $\frac{1}{8}$ es igual a 0,125.

Los **números racionales periódicos** son aquellos cuyos decimales tienen un número ilimitado de cifras, pero se diferencian de los números irracionales porque de esas cifras se puede descubrir un patrón definido, por ejemplo $\frac{1}{6}$ es igual a 0,66666...

La **fracción** se ha usado para denotar particiones entre objetos, es lo que más se ha usado de los números racionales.

Vamos a representar en la recta numérica el siguiente racional: $\frac{7}{3}$

1. Trazamos la recta numérica.
2. Ubicamos las unidades.
3. Con ayuda de la regla, dividimos cada unidad en tres partes iguales.
4. Luego contamos sietes veces esas divisiones y ubicamos el $\frac{7}{3}$.



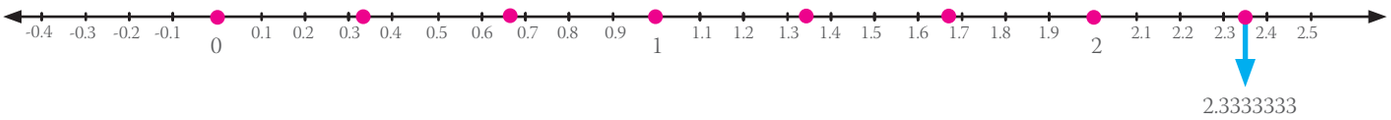
> ***Recuerda que...***
>
> El conjunto de los números racionales se denota con la letra $\mathbb{Q}$, debido a que la palabra "cociente" en varios idiomas europeos es *Quotient*.

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 9 04/09/2023 14:33:19

Ahora representemos en la recta numérica el racional $\frac{7}{3}$, en decimal: 2.33333...

1. Trazamos la recta numérica.
2. Ubicamos las unidades.
3. Con una regla ubicamos los decimales dividiendo la unidad en diez partes iguales.
4. Marcamos un punto lo más aproximado a 2.333333...



Existen expresiones decimales que no se pueden representar con fraccionarios, y surgen de la observación de figuras que aparecen en la naturaleza, como por ejemplo, la diagonal de un cuadrado (el camino más corto entre dos puntos).

Números irracionales

Los **números irracionales** son aquellos cuya expresión decimal contiene infinitas cifras decimales **no periódicas**. El conjunto de los números irracionales tiene infinitos elementos y se denota con la letra $\mathbb{I}$.

Son ejemplos de números irracionales: $\{-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt{11},\pi,e\}$

Algunas aproximaciones a los números irracionales se han hecho por redondeo, como en el caso de $\pi = 3.141592654...$; se estima que es $\pi \approx 3.1416$.

Ejemplo

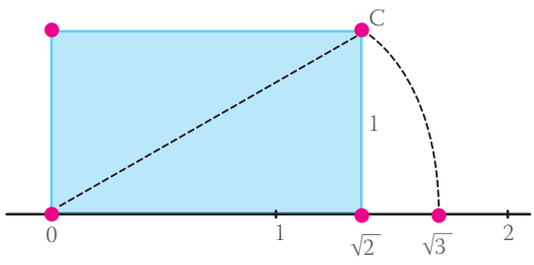
Construyamos $\sqrt{3}$ en la recta numérica.

1. Trazamos la recta numérica y ubicamos las unidades.
2. Construimos un rectángulo con base igual a $\sqrt{2}$ (ya se ha construido anteriormente) y la altura igual a la unidad.
3. Usamos el teorema de Pitágoras y así se deduce que mide $\sqrt{3}$.
4. Hacemos centro en 0 y distancia igual a 0 C.
5. Trazamos un arco de circunferencia hasta que corte en la recta numérica. Este punto corta en la recta donde el valor exacto es $\sqrt{3}$.
6. $h=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+(1)^2}$

   $h=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+(1)^2}$

   $h=\sqrt{2+1}$

   $h=\sqrt{3}$



Utiliza las propiedades de los números reales para justificar procedimientos y diferentes representaciones de subconjuntos de ellos.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 10 04/09/2023 14:33:20

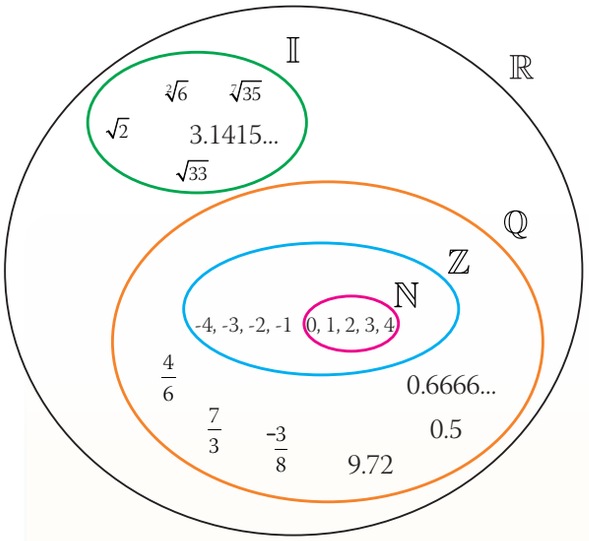
Componente: Numérico-variacional

Números reales

La observación de todos los números estudiados hasta el momento y la unión de los racionales $\mathbb{Q}$ y los números irracionales $\mathbb{I}$ conforma un conjunto denominado **números reales** $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces puede representarse mediante un punto en la recta numérica.



Relaciones de orden

La construcción formal de los números reales surge por la necesidad de ordenar en un mismo sistema a los números racionales e irracionales.

$\mathbb{N}$ = números naturales (enteros positivos).

$\mathbb{Z}$ = números enteros (positivos, negativos y el cero).

$\mathbb{Q}$ = números racionales (fracciones y decimales).

$\mathbb{I}$ = irracionales (decimales con infinitas cifras no periódicas).

Representación de los números reales

Existe una relación de orden entre cada uno de los elementos de los números reales. Esta relación se puede observar en la recta numérica, siendo los números a la izquierda los menores y a la derecha los mayores.

Simbólicamente, se tiene que:

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \geq 0$$

Y a partir de esta relación, se puede definir lo siguiente:

a. Un número real x es mayor que un número real y: $x > y \Leftrightarrow y < x \Leftrightarrow x - y > 0$

b. Un número real x es menor o igual a un número y: $x \leq y \Leftrightarrow y \geq x \Leftrightarrow y - x \geq 0$

c. Un número real x es menor que un número real y: $x < y \Leftrightarrow y - x > 0$, o, $x < y \Leftrightarrow x - y < 0$

Propiedades en el sistema de los números reales

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se rige por unas operaciones y leyes de composición interna, caracterizadas por las operaciones de **adición** y **multiplicación,** respecto a las cuales se pueden comprobar las siguientes propiedades:

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 11 04/09/2023 14:33:21

Propiedades	Adición	Multiplicación
Clausurativa	$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y \in$	$\forall x, y \in \mathbb{R}, xy \in$
	Para todos x, y que pertenezcan al conjunto de los reales , el resultado de $x + y$ pertenece a los reales.	Para todos x, y que pertenezcan al conjunto , el resultado de los reales x por y pertenece a los reales.
Asociativa	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (xy)z = x(yz)$
	Para todos x, y, z que pertenezcan al conjunto de los reales, $(x + y) + z$ es igual a $x + (y + z)$.	Para todos x, y, z que pertenezcan al conjunto de los reales, (x por y) por z es igual a x por (y por z).
Modulativa	$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \mid x + 0 = 0 + x = x$	$\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \mid x1 = 1x = x$
	Para todo x que pertenece a los reales existe un 0 que pertenece a los reales, tal que, x más 0 es igual a 0 mas x y, a su vez, es igual a x. (el módulo de la suma es 0).	Para todo x que pertenece a los reales existe un 1 que pertenece a los reales, tal que, x por 1 es igual a 1 por x y, a su vez, es igual a x. (el módulo del producto es 1).
Opuesto e inverso	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (-x) \in \mathbb{R} \mid$ $x + (-x) = (-x) + x = 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists (x^{-1}) \in \mathbb{R} \mid$ $x(x^{-1}) = (x^{-1})x = 1$
	Para todo x que pertenece a los reales existe un x negativo que pertenece a los reales, tal que, x más $(-x)$ es igual $(-x)$ más x es igual a 0.	Para todo x que pertenece a los reales cuando x es distinto a 0, existe un $1/x$ que pertenece a los reales tal que x por $1/x$ es igual $1/x$ por x es igual a 1.
Conmutativa	$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$	$\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = yx$
	Para todos x, y que pertenecen a los reales, x más y es igual a y más x.	Para todos x, y que pertenecen a los reales, x por y es igual a y por x.
Distributiva	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x(y + z) = xy + xz$	
	Para todos x, y, z que pertenecen a los reales, x por y más z es igual a x por y más x por z.	

Utiliza las propiedades de los números reales para justificar procedimientos y diferentes representaciones de subconjuntos de ellos.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 12 04/09/2023 14:33:23

Componente: Numérico-variacional

Aplico mis conocimientos

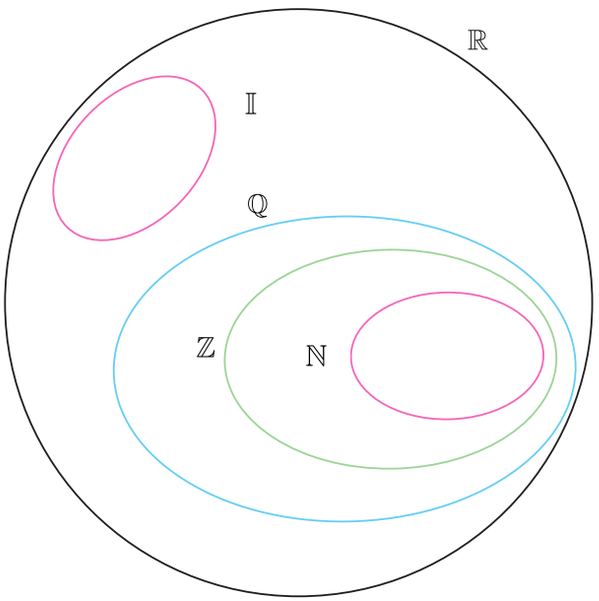
Comunicación y representación

1. Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones, luego ubícalas en la recta real:

$$\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{7},\frac{4}{9},\frac{5}{4},\frac{9}{3},\frac{10}{19},\frac{3}{9},\frac{3}{5},\frac{9}{6},\frac{5}{7},\frac{6}{9},\frac{1}{4}$$

2. Ubica los números en el siguiente gráfico según el conjunto al que pertenecen:

$$\sqrt{35},\sqrt{2},\frac{2}{3},\sqrt[5]{7},-5,0,1,3,\sqrt[3]{3},\frac{-5}{2},\frac{-2}{3},$$
$$0.2,0.51666,\frac{5}{2},-4,-1,5,6$$



3. Observa el siguiente ejemplo para expresar las fracciones de manera continua:

$$\frac{59}{11}=5+\frac{4}{11}=5+\frac{1}{\frac{11}{4}}=5+\frac{1}{2+\frac{3}{4}}=$$
$$5+\frac{1}{2+\frac{\frac{1}{4}}{3}}=5+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

4. Ahora, expresa las siguientes fracciones de manera continua:

a. $\frac{41}{13}$ **b.** $\frac{25}{37}$ **c.** $\frac{1}{7}$ **d.** $\frac{81}{57}$

Razonamiento y solución de problemas

5. Ordena de mayor a menor las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}$;

b. $\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+2}}}$;

c. $\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+3}}}$;

d. $\dfrac{4}{4+\dfrac{4}{4+\dfrac{4}{4+4}}}$;

e. $\dfrac{5}{5+\dfrac{5}{5+\dfrac{5}{5+5}}}$

6. Realiza las siguientes operaciones:

a. $\frac{4}{6}+\frac{3}{6}$ **b.** $\left(4\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{5}+3\right)$

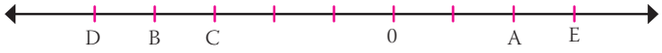
c. $\frac{6}{4}\pi+\frac{2}{10}\pi$ **d.** $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{9}}{5}}$

e. $\sqrt[3]{125}\ \sqrt[3]{27}+\sqrt{4}$ **f.** $\left(\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)-\left(5\sqrt{9}+8\right)$

7. Indica cuáles de los siguientes números son naturales, enteros, racionales y reales:

- $\frac{4}{6}$ • $\sqrt{9}$ • -16 • $\sqrt[3]{2}$ • 3.44444

8. Contesta *falso* o *verdadero* teniendo en cuenta la información de la recta.



a. El número A es igual a $\sqrt{4}$ ( )

b. C + 8 = E ( ).

c. C = –2 ( ).

d. C – A = 0 ( ).

e. D = –4 ( ).

f. C < E ( ).

g. B > 0 ( ).

h. D < A < B ( ).

i. 0 > E ( ).

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 13 04/09/2023 14:33:26

Recta real

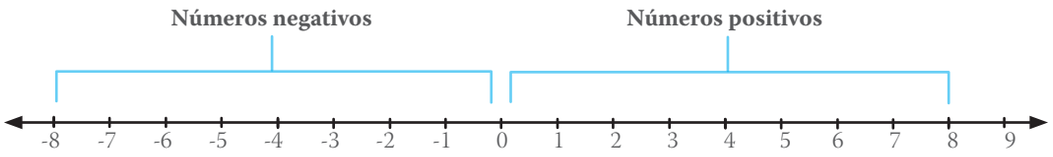
Aprendo

Recta numérica

La **recta** de los **números reales** está compuesta por los números naturales, enteros, racionales e irracionales, incluyendo al cero. Los pasos para construir la recta real son:

1. Dibuja una recta.
2. Señala el origen, cuyo valor es 0.
3. Divide la recta en segmentos iguales (unidades), a la derecha e izquierda del cero.
4. A la **derecha** del origen coloca los números reales **positivos**.
5. A la **izquierda** del origen coloca los números reales **negativos**.

Así, obtienes una recta de los números reales:



Ejemplo

Lee y representa en la recta numérica:

En una ciudad se registró la temperatura en horas de la mañana antes, durante y después de una fuerte granizada. Los datos tomados son: –4°C, 3°C, 5°C, 2°C, 0°C, –2°C, 7°C.

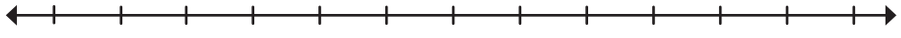
Representa la situación anterior y marca las temperaturas mínima y máxima de la ciudad en las horas de la mañana:

Solución

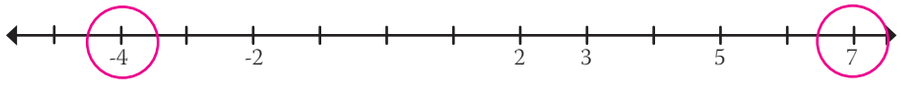
Paso 1: Dibuja la recta numérica:

Paso 2: Señala el punto de origen 0.

Paso 3: Divide la recta en intervalos iguales (unidades).



Paso 4: Ubica los números y observa cuál es el menor y el mayor.



Las temperaturas registradas son: mínima –4°C y máxima 7°C.

Utiliza los números reales (sus operaciones, relaciones y propiedades) para resolver problemas con expresiones polinómicas.

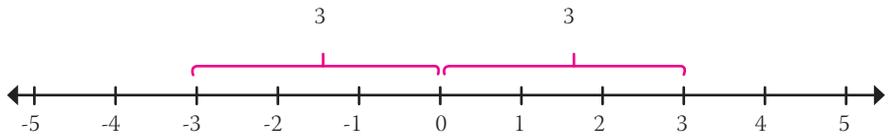
L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 14 04/09/2023 14:33:26

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real es la distancia (en unidades) que lo separa del cero en la recta numérica. Se representa con dos barras | |

Ejemplo

Calculemos la distancia desde el origen hasta el punto –3 y al punto 3.



La distancia del origen al punto –3 se denomina el **valor absoluto de –3**, se simboliza |–3| y también es denominado **3 unidades a la izquierda del origen:** |–3| = 3.

La distancia del origen al punto 3 se denomina **el valor absoluto de 3**, se simboliza |3| y también es denominado **3 unidades a la derecha del origen:** |3| = 3.

El **valor absoluto** para cualquier número a es:

$|a| = a$ si a es un número positivo o 0.

$|a| = -a$ si a es un número negativo.

Consecuentemente, $-a$ significa que si $a = -5$, entonces $-a = -(-5)$ y, a su vez, $-(-5) = 5$ siendo este un número positivo. **El valor absoluto de un número siempre es positivo.**

Ejemplo

De acuerdo con la definición, se puede afirmar que $|3| = 3$ y $|-3| = -(-3) = 3$

Hallemos $-|\sqrt{3}|$

$-|\sqrt{3}| = -\sqrt{3}$ Porque $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ y el signo negativo se encuentra en la parte exterior del valor absoluto, por esto $-|\sqrt{3}| = -\sqrt{3}$

Intervalos

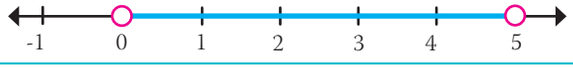
Al conjunto de números en la recta real se le denomina **intervalo**, en el que a y b se denominan **extremos del intervalo**. Para escribir se usa la **notación de intervalo**.

En la recta numérica, un círculo relleno indica que un punto extremo es parte del intervalo, y un círculo vacío que indica el punto extremo no es parte del intervalo.

En la notación de intervalos, los **paréntesis cuadrados** [ ] se usan para mostrar que los puntos son parte del intervalo y los **paréntesis** ( ) indican que los puntos extremos no son parte del intervalo.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 15 04/09/2023 14:33:27

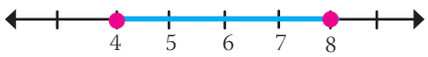
Existen 4 tipos de intervalos principales entre los extremos **a** y **b**.

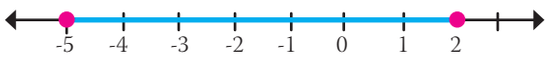
Intervalo	Recta numérica	Nombre del intervalo
$[-3,2]$		cerrado
$(0,5)$		abierto
$[0,6)$		semiabierto por la derecha
$(-2,4]$		semiabierto por la izquierda

Aplico mis conocimientos

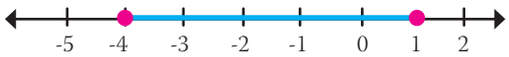
Comunicación

1. Escribe el intervalo que se marca en cada una de las rectas reales:

a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

f. 

Razonamiento y solución de problemas

2. Expresa en forma de conjuntos y ubica en la recta real los siguientes intervalos:

a. $\left(3,\frac{4}{3}\right]$ **b.** $\left[-4,\sqrt{2}\right)$ **c.** $\left(-\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$

d. $\left[-\frac{1}{4},9\right]$ **e.** $(-5.43,7.31)$

3. Completa la siguiente tabla:

Conjunto	Intervalo	Recta
		
$\{x / -1 \le x < 4\}$		
	$(-3, 9)$	

4. Clasifica los siguientes números racionales en decimales exactos o decimales periódicos, y aquellos que sean exactos, represéntalos en la recta real:

$$\frac{1}{3};\ \frac{5}{3};\ -\frac{4}{3};\ \frac{8}{5};\ -\frac{6}{7};\ \frac{10}{23};\ -\frac{7}{14};\ -\frac{9}{5}$$

5. Escribe el símbolo de **pertenece** o **no pertenece** en cada caso ($\in$ o $\notin$)

a. -435 _____ $\mathbb{N}$

b. -135 _____ $\mathbb{Q}$

c. $\frac{800}{3}$ _____ $\mathbb{N}$

d. -4.5 _____ $\mathbb{Z}$

e. -8^2 _____ $\mathbb{R}$

f. $\sqrt{5}$ _____ $\mathbb{Z}$

g. $\sqrt{-5}$ _____ $\mathbb{R}$

6. Escribe en forma de conjunto y de intervalo los números reales que hacen parte del rango de la figura. Encuentra las coordenadas del punto C de un cuadrado ABCD si A = (–3,4) B = (–3,–2) y D = (3,–2).

- Traza la figura en el plano real.
- Escribe en forma de conjunto y de intervalo los números reales que hacen parte del dominio de la figura.
- Escribe en forma de conjunto y de intervalo los números reales que hacen parte del rango de la figura.

7. Representa en el plano real las siguientes coordenadas:

a. $\left(-3,\sqrt{8}\right)$ **c.** $(-5,-4)$ **e.** $(0,-5)$

b. $\left(\sqrt{3},0\right)$ **d.** $\left(-\sqrt{3},-\sqrt{8}\right)$

Utiliza los números reales (sus operaciones, relaciones y propiedades) para resolver problemas con expresiones polinómicas.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 16 04/09/2023 14:33:29

Componente: Numérico-variacional

Potenciación y radicación

Aprendo

Potenciación

Si a pertenece a los reales y n es un entero positivo, la expresión a^n es el producto que resulta de tomar a como un factor iterativo de n veces, es decir:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Entonces a se llama **base**, n se llama **exponente** y a^n es la **potencia**. También se le denomina **potencia** al resultado de esta operación.

En particular, a^1 es igual a la base a
$a^1 = a$ para todo número real a, además, cuando la base sea 1 o 0 tendremos:

$1^n = 1$ Para todo número entero positivo n

$0^m = 0$ Para todo número entero positivo m

Si la base es un número real diferente de 0 y el exponente es un número entero negativo; entonces, en la **potencia** a^{-n} el número real se obtiene como:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a^n}\right) = \left(\frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}}\right) = \frac{1}{a^n}$$

Por último, veamos la propiedad del exponente igual a 0: si el exponente n es igual a 0, la **potencia** se define de la siguiente manera:

$a^0 = 1$ para todo número real a, $a \neq 0$

Ejemplo

Representemos la operación como multiplicación repetitiva que permita calcular la **potencia** indicada:

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ **b.** $\left(\sqrt{5}\right)^4$ **c.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{-3}$

Solución

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

b. $\left(\sqrt{5}\right)^4 = \left(\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{5}\right) = \left[\left(\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{5}\right)\right] \cdot \left[\left(\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{5}\right)\right] = 5 \cdot 5 = 25$

Desempeño: Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 17 04/09/2023 14:33:31

c. $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^{-3}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{3}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)=\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right]\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)=\left(\frac{2}{25}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{125}$

Al desarrollar la elevación de un número real a un entero es necesario tener presente el **signo** de la **base** y el **número de veces** que se toma como factor, para así determinar el signo de la **potencia**.

Las aplicaciones de la potenciación están ligadas con el cálculo de áreas y de volumen, además de poder simplificar valores exageradamente grandes o pequeños, como el peso de una partícula microscópica o la distancia entre estrellas.

Base / Exponente	Positiva	Negativa
Par	+	+
Impar	+	–

Notación científica

En **notación científica** los números se expresan como $a\times10^{n}$, donde $1\leq a<10$ y n es un entero. Cuando una **potencia** de 10 no tiene coeficiente numérico, como en 10^{6}, suponemos que el coeficiente numérico es 1. Así, 10^{6} significa 1×10^{6} y 10^{-8} significa 1×10^{-8}.

Propiedades de la potenciación

Propiedad	Representación	Ejemplo
Producto de potencias de la misma base	$a^{m}a^{n}=a^{m+n}$	$2^{5}\cdot2^{3}=2^{8}$
Cociente de potencias de la misma base	$\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$	$\frac{5^{6}}{5^{2}}=5^{4}$
Producto de potencias con el mismo exponente	$(ab)^{n}=a^{n}b^{n}$	$(2\cdot5)^{8}=2^{8}\cdot5^{8}$
Cociente de potencias con el mismo exponente	$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{7}=\frac{3^{7}}{5^{7}}$

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 18 04/09/2023 14:33:33

Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{mn}$	$\left(6^4\right)^3 = 6^{4\cdot 3} = 6^{12}$
Potencia con exponente negativo	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{2}\right)^4$
Potencia de exponente cero	$a^0 = 1$	$8^0 = 1$
Potencia de exponente uno	$a^1 = a$	$6^1 = 6$

Ejemplo

Simplificar la expresión $\left(a^3 \times a^{-7}\right)^{-2}$

Solución: Inicialmente debes trabajar con la expresión que está en el paréntesis antes de aplicar el exponente negativo.

$\left(a^3 \times a^{-7}\right)^{-2} = \left(a^{3+(-7)}\right)^{-2}$ utilizando la propiedad de la multiplicación

$\left(a^3 \times a^{-7}\right)^{-2} = \left(a^{-4}\right)^{-2}$ simplificando

$\left(a^3 \times a^{-7}\right)^{-2} = a^{(-4)\times(-2)}$ utilizando la propiedad de exponentes

$\left(a^3 \times a^{-7}\right)^{-2} = a^8$ simplificando

Ideas clave...

Al comparar la expresión $\sqrt{A}$ con $\sqrt[n]{A^m}$ se tiene que es la cantidad subradical que en la forma exponencial cumple el papel de la base de la potencia, n=2 es el índice de la raíz que, como se observa, no se coloca, y m=1 es el exponente de la cantidad subradical que cumple el papel de potencia.

Radicación en los reales

La **extracción de la raíz** a partir de un número determinado se ejecuta utilizando el símbolo radical $\sqrt{\ }$, que se llama **radical**. Por ello es que se habla de operaciones con radicales, como en los números irracionales.

La representación algebraica es:

Potencia		Raíz
$x^n = a$	$\Leftrightarrow$	$\sqrt[n]{a} = x$
Siendo x la base, n el exponente y a el resultado de la potencia.		Siendo x la raíz, n el índice del radical y a el radicando.

Desempeño: Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 19 04/09/2023 14:33:35

Propiedades de los radicales

Propiedad	Representación	Ejemplo
Expresión de un radical en forma de potencia	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}}$
Simplificación de radicales	$\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[3\cdot 2]{4^{5\cdot 2}} = \sqrt[3]{4^5}$
Introducción de un signo radical	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(3)^3 2}$
Producto de radicales	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{3\cdot 5} = \sqrt{15}$
Cociente de radicales	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27}$
Potencia de radicales	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\left(\sqrt[3]{4}\right)^5 = \sqrt[3]{4^5} = \sqrt[\not 3]{4^{\not 3}\cdot 4^2} = 4\sqrt[3]{4^2}$
Raíz de un radical	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$	$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2\cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

Los **índices pares** son caracterizados por la raíz n-ésima de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un índice par y a es un número real no negativo. El resultado es un número real no negativo b tal que $b^n = a$.

Los **índices impares** son caracterizados por la raíz n-ésima de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un índice impar y a es un número real. El resultado es el número real b tal que $b^n = a$.

Índices pares	Índice impares
Ejemplos: $\sqrt[4]{81} = 3$ $\sqrt[4]{\frac{1}{625}} = \frac{1}{5}$	Ejemplos: $\sqrt[3]{-27} = -3$ $\sqrt[5]{3125} = 5$

Ejemplo

Simplifica: $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Paso 1 $\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

Paso 2 $= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{49}}$

Paso 3 $= \frac{\sqrt{7}}{7}$

Ejemplo

Simplifica: $\frac{47}{\sqrt{3}+5\sqrt{2}}$.

Se racionaliza el denominador multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador:

Paso 1 $= \frac{47\left(\sqrt{3} - 5\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - 5\sqrt{2}\right)}$

Paso 2 $\frac{47\left(\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)}{3-25(2)}$

Paso 3 $\frac{\not{47}\left(\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)}{-\not{47}} = -\left(\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right) = -\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 20 04/09/2023 14:33:38

Componente: Numérico-variacional

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Escribe en forma de potencia las siguientes expresiones:

a. $\left(-\frac{2}{7}\right).\left(-\frac{2}{7}\right).\left(-\frac{2}{7}\right).\left(-\frac{2}{7}\right)=$

b. $\frac{45}{((6).(6).(6).(6))}=$

c. $27=$

d. $\frac{1}{625}=$

2. Resuelve las siguientes operaciones con potencias:

a. $\frac{6^3}{6^9}$

b. $(7^9).(7^4)$

c. $\frac{(8^9).(8^{12})}{(8^4)}$

d. $\left[(5^3)\right]^5$

e. $\left[\frac{(4^3)}{(4^2)}\right]^5$

f. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

g. $\left(\frac{(2)^2}{(7)^4}\right)^3$

3. Escribe en forma de potencia las siguientes raíces:

a. $\sqrt{5}$ **b.** $\sqrt[4]{7}$ **c.** $\sqrt{3^3}$

d. $\left(\sqrt[3]{5^4}\right).\left(\sqrt{5^2}\right)$ **e.** $\left(\sqrt[6]{7}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$

4. Escribe en forma radical las siguientes potencias:

a. $\left(4^{\frac{2}{3}}\right)$ **d.** $\left(7^{\frac{4}{9}}\right)$ **f.** $3^{\frac{1}{2}}$

b. $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)$ **e.** $\left(5^{\frac{3}{7}}\right)$ **g.** $\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{2}{5}}$

c. $\left(6^{\frac{2}{5}}\right)$

Solución de problemas

5. Lee atentamente y contesta las siguientes preguntas:

a. Si el lado de un cuadrado mide un x, ¿cuál será el área de dicho cuadrado?

b. Si se tiene un rectángulo en el cual el lado más corto mide $2x$ y su lado más largo mide $2x+5$, ¿cuál será el área del rectángulo?

c. La base de un triángulo mide $\frac{x}{2}$ y su altura es igual a x. ¿Cuál es el área del triángulo?

6. Escribe en notación científica las siguientes cifras:

a. 25 millones de dólares.
b. Trescientos mil kilogramos de peso.
c. Cuatrocientos treinta y cinco mil pesos.
d. 35 milímetros expresados en metros.

7. Escribe en notación científica los siguientes números:

a. 346,000,000,000
b. 0.0000004567
c. 945,000,000
d. 0.005678
e. 89,324,000,000
f. 45,600,000
g. 0.0005

8. Una empresa produce 3 toneladas de algodón al día. ¿Cuántos kilogramos de algodón produce al cabo de 23 días?

9. Una persona tarda recorriendo el departamento del Petén 20 días y 5 horas. ¿Cuántos segundos tardó en hacer el recorrido? Expresa tu respuesta en notación científica.

10. Un país europeo tiene una población de 3.69×10^7 habitantes y una superficie de $5.54 \times 10^5 km^2$. ¿Cuál será la densidad poblacional de dicho país? (Densidad=habitantes/km^2).

Desempeño: Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 21 04/09/2023 14:33:42

Números complejos

Aprendo

Un **número imaginario** es un número cuyo cuadrado es negativo. Cada número imaginario puede ser escrito como bi donde b es un número real, e i es la unidad imaginaria con la propiedad:

$$i^2 = -1$$

Por ejemplo: $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$, $\sqrt{-9} = 3i$, $\sqrt{-11} = \sqrt{11}i$

Propiedades de los números imaginarios

Los números imaginarios cumplen las siguientes propiedades:

$i^0 = 1$	$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$	$i^{13} = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$	$i^{14} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$	$i^{15} = -i$

El patrón se repite, para calcular una determinada potencia de i se divide el exponente en 4 y el residuo es el exponente de la potencia equivalente a la dada.

Ejemplo

i^{43}

$43 \mid 4$

$3 \quad 10$

$i^{43} = (i^4)^{10} \times i^3$

$i^3 = -i$

$i^{43} = -i$

i^{77}

$77 \mid 4$

$37 \quad 19$

1

$i^{77} = (i^4)^{19} \times i^1$

$i^1 = i$

$i^{77} = i$

Representa un número complejo en forma binómica de la siguiente manera:

El número a es la parte real del número complejo.

El numero b es la parte imaginaria del número complejo.

Si $b = 0$, el número complejo se expresa $a + 0i = a$ es igual a la parte real.

Si $a = 0$, el número complejo se reduce a bi y se dice que es un número imaginario puro.

El conjunto de los números complejos se representa con una $\mathbb{C}$.

Propiedades

Los números complejos $a+bi$ y $-a-bi$ se denominan **opuestos**.

Los números complejos $z=a+bi$ y $\overline{z}=a-bi$ se denominan **conjugados**.

Representación gráfica

La representación de un número complejo se muestra en unos ejes cartesianos, donde el eje de las abscisas (horizontal) representa la parte real y la parte imaginaria en el eje de las ordenadas (vertical).

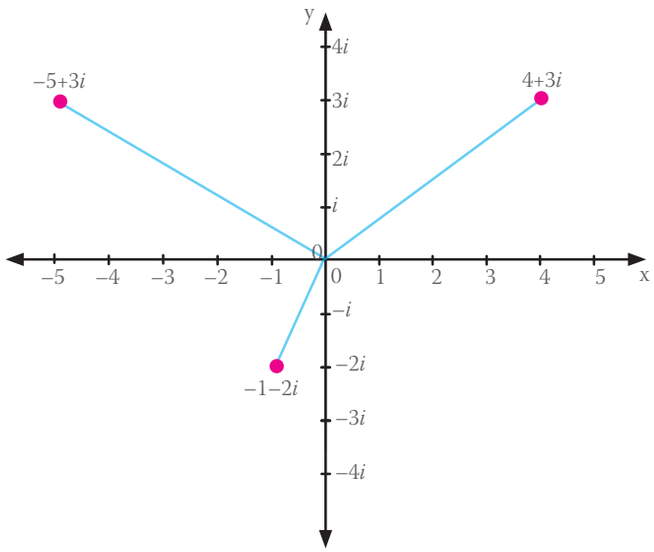
Utiliza las propiedades de los números reales para justificar procedimientos y diferentes representaciones de subconjuntos de ellos.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 22 04/09/2023 14:33:44

Ejemplo

Representa en el plano complejo los siguientes números:

$z_1 = -5 + 3i$; $z_2 = -1 - 2i$; $z_3 = 4 + 3i$.



Solución:

$z_1 = -5+3i$; $z_2 = -1-2i$; $z_3 = 4+3i$.

Si $z = a + bi$, a se llama **la parte real de z,** y b **la parte imaginaria de z,** y se denominan mediante a = $R(z)$ y b = $I(z)$, respectivamente. El símbolo z, que puede representar cualquier elemento del conjunto de números complejos, es llamado **una variable compleja**.

Operaciones entre números complejos

Suma

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

Ejemplo

$$(-7+4i)+(-2-5i)=(-7-2)+i(4-5)=-9-i$$

Multiplicación

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+iad+ibc+i^2bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

Ejemplo

$$(2+4i)\times(1+2i)=(2\times1-4\times2)+i(2\times2+4\times1)=-6+8i$$

Resta

$$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$$

Ejemplo

$$(-2-i)-(2-7i)=(-2-2)+i(-1+7)=-4+6i$$

División

$$\frac{(a+ib)}{(c+id)}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac-iad+ibc-i^2bd}{c^2-i^2d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Ejemplo

$$\frac{(5+2i)}{(7-11i)}=\left(\frac{5\times7-2\times11}{7^2+11^2}\right)+\left(\frac{2\times7+5\times11}{7^2+11^2}\right)i=\left(\frac{13}{170}\right)+\left(\frac{69}{170}\right)i$$

Desempeño: Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 23 04/09/2023 14:33:50

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. ¿Cuál es el resultado de multiplicar un número complejo por su conjugado? Da un ejemplo de dos números complejos cuyo producto sea un número real, un número imaginario y cero.

2. Explica por qué si un número es igual a su conjugado entonces el número debe ser real.

3. Explica con tus propias palabras por qué al tomar el conjugado de la suma de dos complejos el resultado es el mismo que tomar la suma de sus conjugados.

Razonamiento y solución de problemas

4. Realiza las operaciones teniendo en cuenta la siguiente información:

$$a_1 = 3+4i$$

$$a_2 = \frac{3}{4}$$

$$a_3 = 5i$$

a. $a_1 - a_3$

b. $(a_1 - a_2)a_3$

c. $(a_1^2 a_3)$

d. $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$

e. $(a_1 + a_3)$

5. Con los siguientes números complejos encuentra el valor de x que da sentido a cada igualdad.

$$a_1 = 3+i$$

$$a_2 = 3+6i$$

a. $a_1 + x = a_2$

b. $a_1^2 x = 1$

c. $a_1 + x + a_2 = 1$

d. $xa_2 = a_1$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

b. $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$

c. $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

7. Realiza las siguientes sumas de números complejos:

a. $(5 + 7i) + (7 + 9i)$

b. $(-17 + 8i) + (17 + 6i)$

c. $(-6 - 4i) + (-7 + 8i)$

d. $(170 + 14i) + (-7 - 77i)$

e. $(77 + 83i) + (8 + 14i)$

f. $(9 + 5i) + (-4 - i)$

8. Representa gráficamente los siguientes números complejos:

a. $4-5i$

b. $-2+7i$

c. $-5-6i$

d. $1+4i$

e. $6+6i$

f. $-3+3i$

9. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de los siguientes números complejos:

Completo	Opuesto	Conjugado
$-6-7i$		
$2+2i$		
$-3-5i$		
$2+i$		

10. Dados los números complejos:

❖ $a=5-6i$ ❖ $b=-4+9i$ ❖ $c=-8-9i$ ❖ $d=4+8i$ ❖ $e=-9-4i$

Realiza las siguientes operaciones:

a. $a + b$

b. $c \times d$

c. $d \times e$

d. $a - e$

Utiliza las propiedades de los números reales para justificar procedimientos y diferentes representaciones de subconjuntos de ellos.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 24 04/09/2023 14:33:54

Componente: Numérico-variacional

Ecuación lineal

Aprendo

Una **ecuación lineal** es un polinomio de grado 1 que involucra una igualdad y dos o más variables. Se expresa de manera general como $ax+by+c=0$, donde a y b son números reales y x y y son las incógnitas o variables.

Un ejemplo de ecuación lineal es $5x+3y-18=0$ en donde podemos aplicar procesos sencillos para despejar la variable deseada.

Problemas que se resuelven aplicando ecuaciones lineales

No existe un método universal para solucionar cualquier situación dada. Sin embargo, la siguiente es una guía general para resolver problemas con ecuaciones lineales.

1. Convierte cada enunciado en una igualdad.
2. Asigna x a un valor desconocido asociado con el problema.
3. Lleva a cabo la sustitución necesaria en las igualdades de la parte (1) para obtener una ecuación lineal.
4. Resuelve la ecuación lineal para obtener el valor de x.
5. Usa el valor de x para obtener la información que buscamos en el problema.

Ejemplo

La suma de dos números es 28, y el segundo número es el triple del primero. ¿Cuáles son los números?

Paso 1: Convierte cada enunciado en una igualdad:

Enunciado	Ecuación
La suma de dos números es 28.	Primer número + segundo número = 28
El segundo número es el triple del primero	Segundo número = 3 primer número

Paso 2: Asigna x a un valor desconocido del problema: Sea x el primer número.

Paso 3: Sustituye en las igualdades del paso 1 para obtener una ecuación lineal:

Ecuación	Sustitución
Segundo número = 3 primer número	Segundo número = $3x$
Primer número + segundo número = 28	$x + 3x = 28$

Paso 4: Resuelve la ecuación lineal para obtener el valor de x:

$$\text{Si } x + 3x = 28 \quad \rightarrow \quad x = 7.$$

Paso 5: Usa el valor de x para obtener la información que buscamos en el problema:

Primer número: $x = 7$.

Segundo número: $3x = 21$. Los dos números son 7 y 21.

Desempeño: Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 25 04/09/2023 14:33:54

Aplico mis conocimientos

Razonamiento

1. Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones, sabiendo que:

$a=-3$, $b=4$, $c=2$ y $d=\frac{3}{4}$

a. $2a-3b+4c$

b. $-3a+b+d$

c. $3d-b+5c-6a$

d. $-5c-b+2c-3a+d$

e. $\frac{-5a+4b+c}{3a}$

f. $\frac{4}{3}c+\frac{1}{2}d-\frac{4}{5}b$

2. En las siguientes ecuaciones despeja la variable indicada:

a. $6z-5y=2y-4$ despeja y

b. $7x+3=2y+11$ despeja x

c. $3-40x=-5y-2$ despeja x

d. $3z+20x-5y+1=3y-2+10x$ despeja y

e. $\frac{4}{5}a+12-3b=\frac{6}{7}b+15$ despeja la variable b

3. Encuentra el valor numérico de y sabiendo que $w=-2$, $z=-4$, $p=3$ (recuerda despejar y en caso de ser necesario).

a. $y=2w+5p-z$

b. $2y=w-p+z$

c. $5y+1=3w-2p+3z$

d. $7y+4=5w-z$

e. $\frac{2}{3}y=p+2z-4$

Comunicación

4. Plantea la ecuación que representa o modela los siguientes enunciados:

a. 5 veces la edad de María es igual a 3 veces la edad de Juan aumentada en 4 años.

b. Juan espera que cada planta de maíz sembrada produzca 5 mazorcas. Teniendo en cuenta las condiciones planteadas al inicio (sembrar 30 plantas de maíz), determina la ecuación que le permite encontrar el número total de mazorcas en el cultivo. Usa variables para establecer la ecuación y despeja una de ellas.

c. El triple de un número aumentado en 9 es igual a tener cinco veces el número aumentado en 1. ¿Cuál es el número?

d. Inventa un problema que pueda ser modelado por medio de una ecuación y plantea su respectiva expresión matemática.

Solución de problemas

5. La expresión que permite encontrar la distancia recorrida por un auto que mantiene su velocidad constante es $y=12t+5$ donde t es el tiempo en segundos y y es la distancia en metros. Determina la distancia recorrida por el auto al cabo de 1, 2, 5 y 10 segundos.

6. Juan quiere determinar los gastos que debe asumir para que su cultivo de maíz prospere sano y saludable. Para ello, debe sembrar en época de lluvias. También hizo una lista de insumos necesarios para el cultivo:

- Semilla de maíz: paquete × 50 unidades = Q 150.00.
- Abono natural, necesario para preparar la tierra para el cultivo.
- Insecticida × 100 ml = Q 75.00 (alcanza para una fumigación).

El tiempo aproximado desde que se siembra la semilla de maíz hasta que esté listo para la cosecha es de 5 meses, y debe fumigarse finalizando el primer mes, cuando la planta germine, y en el tercer mes cuando la planta tenga un buen follaje formado. Determina una expresión que le permita conocer a Juan el mínimo valor posible a invertir en el cultivo.

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 26 04/09/2023 14:33:59

Relaciones y funciones

Aprendo

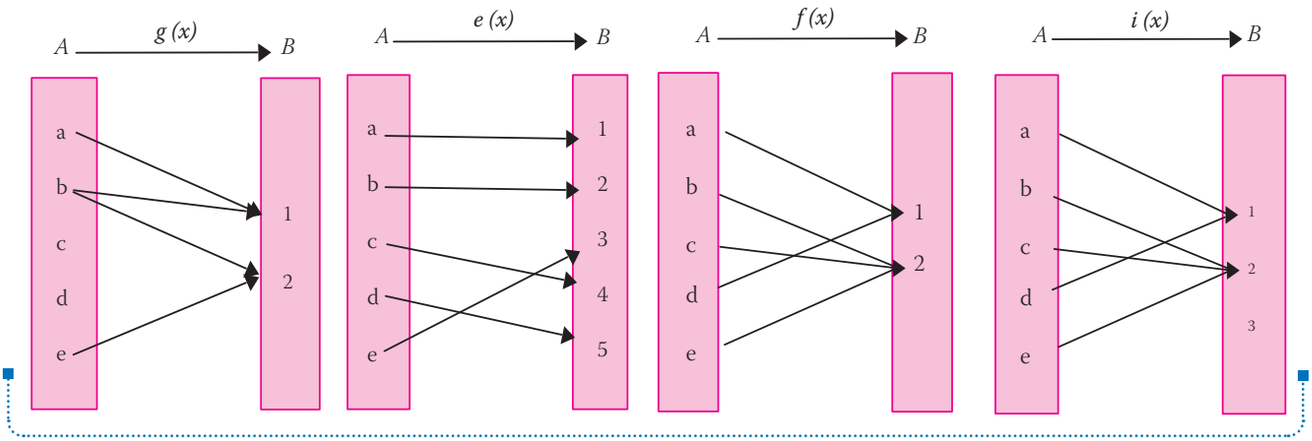
Relación

En una **relación**:

- Al conjunto A se le puede llamar **conjunto de salida** y al conjunto B **conjunto de llegada**.
- En una relación, el tamaño de los conjuntos o cantidad de elementos de cada uno no importa para el vínculo establecido.
- Pueden quedar elementos sin asociarse en cualquiera de los conjuntos A y B.

Ejemplo

En los siguientes diagramas podemos evidenciar múltiples relaciones entre elementos pertenecientes al conjunto A con elementos pertenecientes al conjunto B:



Función

Una **función** es una regla de asociación que vincula a cada elemento perteneciente a un conjunto A con un y solo un elemento perteneciente al conjunto B.

"Toda función es una relación, pero no toda relación es función".

"En una función, un elemento perteneciente al conjunto de salida A no puede estar vinculado con más de un elemento (imagen) perteneciente al conjunto B".

Las funciones tienen las siguientes características:

Dominio: es el conjunto de salida de la función, se denota así: $Dom\, f$.

Codominio: es el conjunto de llegada de la función, se denota como $Cod\, f$.

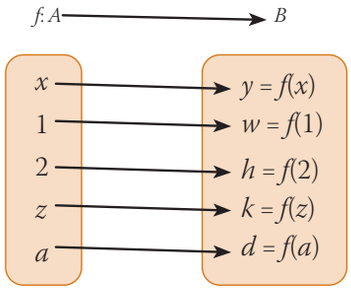
Rango o recorrido: es el conjunto conformado por los elementos que pertenecen al conjunto de llegada (Codominio) que son imagen de cada elemento del conjunto de salida (Dominio), se denota como $Ran\, f$.

Gráfica cartesiana: es la representación en el plano cartesiano de parejas ordenadas (x,y), donde generalmente ubicamos los elementos del dominio $(Dom\, f)$ en el eje x y los elementos del codominio $(Cod\, f)$ en el eje y.

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 27 04/09/2023 14:33:59

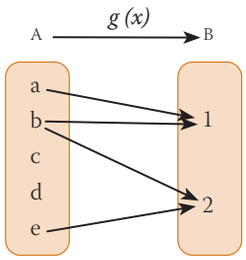
Ejemplos y tipos de funciones



Sea ***f* una función** que asocia elementos x del conjunto A con elementos y del conjunto B.

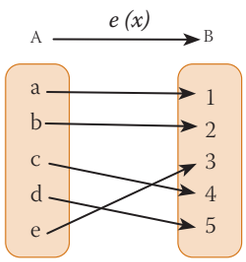
$f(x)$ es la notación indicada para hacer referencia al elemento del conjunto B que es imagen de algún x.

Teniendo por ejemplo que 1 está asociado con w y como w es la imagen de 1, entonces $w=f(1)$, z está asociado con k, y como k es la imagen de z, entonces $k = f(z)$



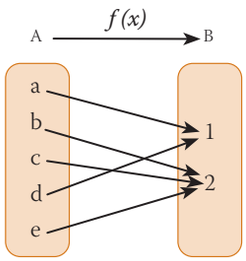
En este ejemplo podemos ver que $g(x)$ **no es una función** debido a que:

- Existen elementos del conjunto A que no están asociados con elementos del conjunto B.
- El elemento b perteneciente al conjunto A está relacionado con más de un elemento del conjunto B.



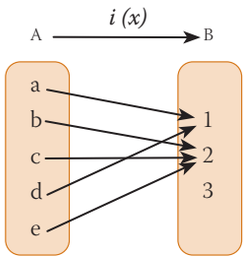
Este es un ejemplo de **función inyectiva** debido a que:

- Cada elemento del conjunto A está vinculado con un único elemento en el conjunto B.
- Cada elemento del conjunto B es imagen de un elemento diferente en el conjunto A.

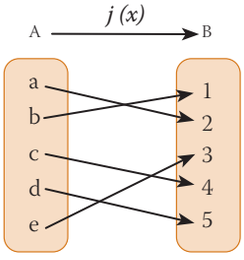


En este ejemplo podemos ver que $f(x)$ sí es una función debido a que cumple con la definición:

- Cada elemento del conjunto A está asociado con un elemento del conjunto B.
- Cada elemento del conjunto B es imagen de al menos un elemento del conjunto A (a esto se le conoce como **sobreyectividad**).



En este ejemplo podemos ver que $i(x)$ sí es una función y NO ES SOBREYECTIVA debido a que no todo elemento conjunto B es imagen de al menos un elemento del conjunto A.



Una función es **biyectiva** cuando es **inyectiva** y **sobreyectiva** a la vez; esto quiere decir que los tamaños del conjunto A y B son iguales y tiene que cumplir las condiciones de la inyectividad y la sobreyectividad:

- Cada elemento del conjunto A está vinculado con un único elemento en el conjunto B.
- Cada elemento del conjunto B es imagen de un único elemento en el conjunto A.

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 28 04/09/2023 14:34:00

Ejemplo

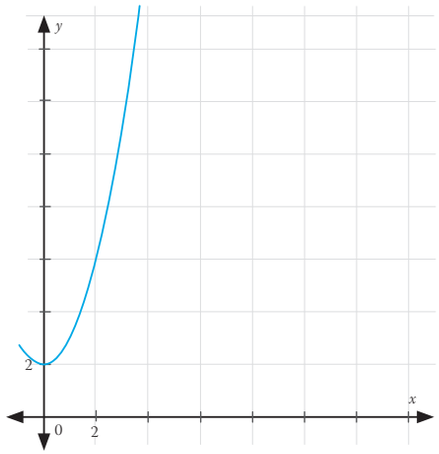
f asigna a cada valor de x"el cuadrado más 2"

Representación simbólica: $f(x) = x^2 + 2$

Representación tabular:

x	$f(x)$
0	2
1	3
2	6
3	11
4	18
5	27
6	38
7	51
8	66

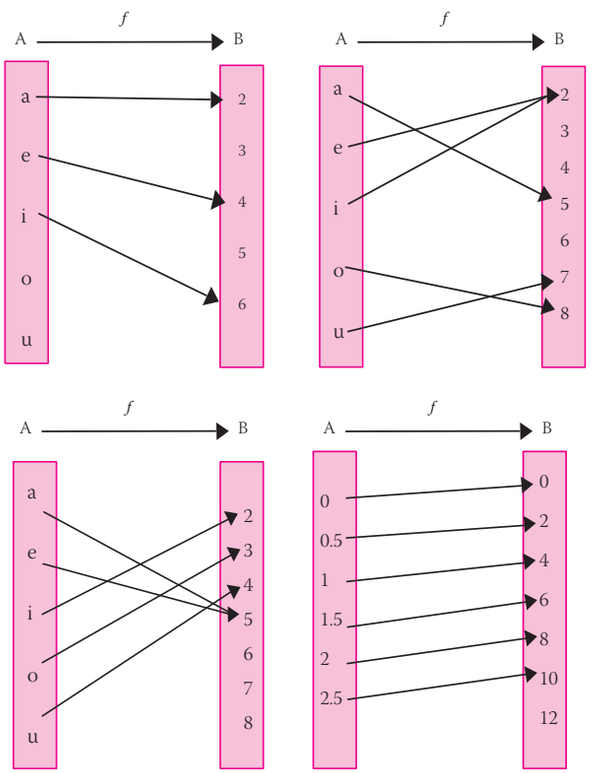
Representación gráfica



Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Teniendo en cuenta cada una de las siguientes relaciones, determina qué casos son funciones y encuentra su dominio, codominio y rango; además, justifica según sea el caso si es inyectiva o sobreyectiva.



Razonamiento

2. Determina cuáles de los siguientes ejemplos de relación cumplen con la condición para ser funciones, sabiendo que $A=\{1,2,3,4,5\}$ y $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. No olvides realizar la respectiva representación.

- **a.** Cada elemento perteneciente a A se asocia con su triple en el conjunto B.
- **b.** Cada elemento de A se asocia con su mitad en B.
- **c.** Cada elemento de A se asocia con los elementos 4 y 8 en B.
- **d.** Todo número par en A se vincula con su doble en el conjunto B.

Solución de problemas

3. En cierto parqueo de la ciudad, la tarifa mínima es deQ 10.00 de ingreso más Q0.65 por cada minuto.

- **a.** Si Juan tardó 25 minutos mientras entregaba el pedido de las mazorcas, ¿cuánto pagó por concepto de parqueadero?
- **b.** Determina la expresión matemática que permite generalizar y hacer la cuenta del valor que se debe pagar para cualquier intervalo de tiempo.
- **c.** Realiza una tabla de valores.
- **d.** Representa la situación usando diagramas de relación y gráfica cartesiana.

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 29 04/09/2023 14:34:01

Componente: Numérico-variacional

Función lineal y ecuación general de la recta

Aprendo

Una línea recta se comporta de manera **creciente** si ocurre que cuanto más grandes se hacen los valores en el eje x, los valores en el eje y también son más grandes. Se puede resumir diciendo que $m > 0$ o que la pendiente es positiva.

Por ejemplo, a mayor número de mazorcas vendidas, mayor será el dinero recibido por concepto de ventas.

- Una línea recta se comporta de manera **decreciente** si ocurre que cuanto más grandes se hacen los valores en el eje x, los valores en el eje y son menores. Se puede resumir diciendo que $m < 0$ (pendiente negativa).

Por ejemplo, al aumentar el precio de un producto, menor será la cantidad de compradores.

- Si tenemos una línea recta **horizontal**, entonces su pendiente es igual a cero, esto es: $m = 0$. Su ecuación será $y = b$, donde b es cualquier número real.

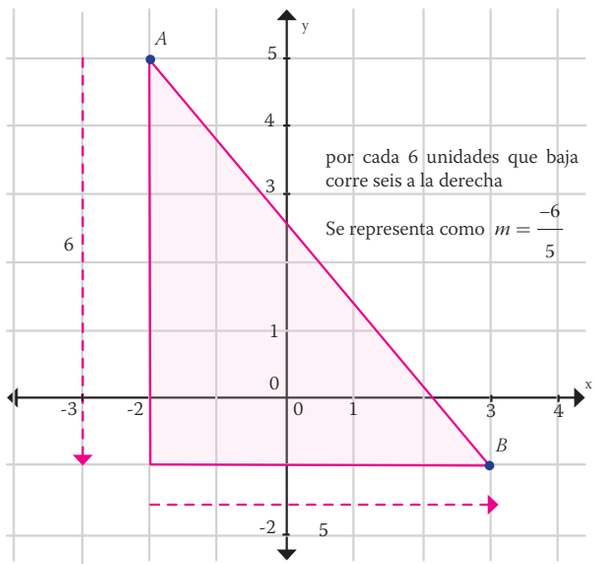
Ecuación de la recta

Se llama **ecuación explícita** o **ecuación general de la recta** a toda ecuación de la forma $y = m\,x + b$ y a partir de ciertos datos que tenemos, podemos determinar las partes literales de la función e incluso representarla sin necesidad de hacer largos procesos.

Paso 1: Encontrar el valor de m, usando la fórmula de la pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$m = \dfrac{(-1)-(5)}{(3)-(-2)}$ (Es muy importante tener en cuenta los signos y el orden de la operación).

$m = \dfrac{-6}{5}$



Paso 2: Hallar el valor de b reemplazando los valores conocidos y usando la ecuación de la recta $y = mx + b$. Para esto, escogemos uno de los dos puntos A o B. (En este caso escogeremos $A = (-2,5)$, pero debe dar lo mismo si escogemos el punto $B = (3,-1)$). Obteniendo $y = mx + b$.

$$5 = -\frac{6}{5}(-2) + b \rightarrow 5 = \frac{12}{5} + b \rightarrow 5 - \frac{12}{5} = b \rightarrow \frac{25-12}{5} = b \rightarrow \frac{13}{5} = b$$

Paso 3: Encontrar ecuación de la recta, reemplazando m y b en $y = mx + b$:

$$y = -\frac{6}{5}x + \frac{13}{5} \qquad y = \frac{-6(x) + 13}{5}$$

La ecuación explícita de la recta es $y = -\dfrac{6}{5}(x) + \dfrac{13}{5}$

Utiliza los números reales, sus operaciones, relaciones y representaciones para analizar procesos infinitos y resolver problemas.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 30 04/09/2023 14:34:05

Componente: Numérico-variacional

Rectas paralelas

Una recta a es **paralela** a otra recta b si cumplen con la condición de tener la misma pendiente. Lo que quiere decir que $m_1 = m_2$. En ese caso, se prolongarían infinitamente y nunca se intersecarían.

Ejemplo

Si te piden encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A=(1,-1)$ y es paralela a la recta $y=\frac{5}{4}x+\frac{11}{4}$, debes hacer los siguientes pasos:

Paso 1. Reconoce la pendiente de la ecuación dada. En este caso $m=\frac{5}{4}$ (esta será la misma pendiente de la recta que vamos a encontrar).

Paso 2. Toma la ecuación explícita de la recta y reemplaza los valores conocidos.

$m=\frac{5}{4}$ $x_1=1$ y $y_1=-1$

$y=mx+b$ Ecuación explícita

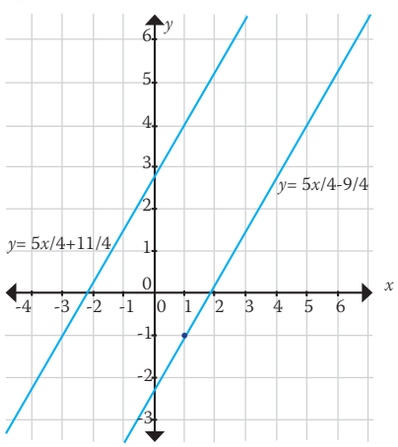
$-1=\frac{5}{4}(1)+b$ reemplazando m=5/4 y $x=1$ y y=-1 (esto para hallar b)

$-1-\frac{5}{4}=b$ despejando b, tenemos:

$$\frac{-4-5}{4}=b \quad \rightarrow \quad -\frac{9}{4}=b$$

Paso 3. Reemplaza los valores encontrados m y b en la ecuación explícita $y=mx+b$

$y=\frac{5}{4}x-\frac{9}{4}$ ecuación de la recta paralela.



Rectas perpendiculares

Una recta a es **perpendicular** a otra recta b si cumple con la condición de tener pendiente opuesta inversa; lo que es equivalente a: $(m_1)(m_2) = -1$. En ese caso, lo que garantiza la pendiente opuesta inversa es que se forme un ángulo de 90° entre las dos rectas.

Ejemplo

Si te plantean encontrar la ecuación de la recta perpendicular a $y=-3x-\frac{1}{2}$ que pasa por el punto $C=(3,1)$, entonces:

Paso 1. Reconoce la pendiente de la ecuación dada, en este caso es $m=-3$

Paso 2. Estipula la pendiente inversa m_2, la cual será la pendiente de la recta que vamos a encontrar:

$$m_2=\frac{-1}{m_1} \rightarrow \quad m_2=\frac{-1}{-3} \quad \rightarrow \quad m_2=\frac{1}{3}$$

Paso 3. Toma la ecuación explícita de la recta y reemplaza los valores conocidos:

$m_2=\frac{1}{3}$, $x_1=3$ (abscisa) y $y_1=1$ (ordenada)

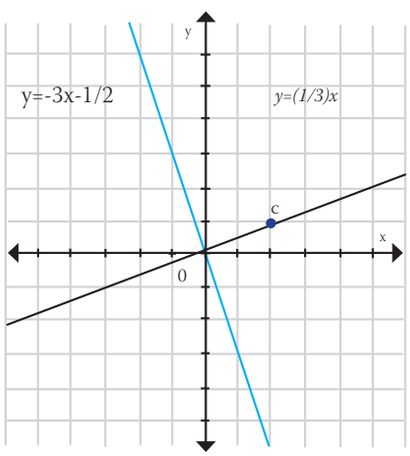
$y=mx+b$ Ecuación explícita

$1=\frac{1}{3}(3)+b$ se reemplaza m, $x_1=3$ y $y_1=1$ (esto para hallar b)

$1=1+b$ se despeja b teniendo $1-1=b \quad \rightarrow 0=b$

Paso 4. Reemplaza los valores encontrados m y b en la ecuación explícita $y=mx+b$

Ecuación de la recta perpendicular: $y=\frac{1}{3}x+0$



Desempeño: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 31 04/09/2023 14:34:10

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Determina si la afirmación es verdadera o falsa. Argumenta tu respuesta.

a. Una recta c es paralela a una recta d si y solo si sus pendiente son iguales.

b. Si una recta w tiene una pendiente diferente a la de una recta x, necesariamente serán secantes.

c. Si la pendiente de una recta es negativa, entonces su comportamiento es creciente.

d. Siempre que dos rectas a y b tengan pendientes inversas, entonces serán perpendiculares.

Razonamiento

2. Determina el punto exacto en el cual se cruzan las ecuaciones $y=\frac{1}{5}x+1$ y $y=-3x+2$ y grafícalas.

3. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a $y=\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}$ que pasa por el punto C=(1,3).

4. Encuentra la ecuación de la recta paralela a $y=-4x+2$ que pasa por el punto D=(4,-1).

5. Sean los puntos A=(-5,-2) y B= (−1,4), determina la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos y calcula la ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto E= (0,1), luego determina el punto exacto en el que se intersecan las dos rectas.

Solución de problemas

6. Dos empresas A y B dedicadas a las comidas rápidas, realizaron las estadísticas de sus ingresos por concepto de ventas en cierto intervalo de tiempo. Encontraron las siguientes ecuaciones:

Empresa A : $y=3{,}000t+8{,}000$ donde y es la cantidad de dinero en quetzales y t es el tiempo en días.

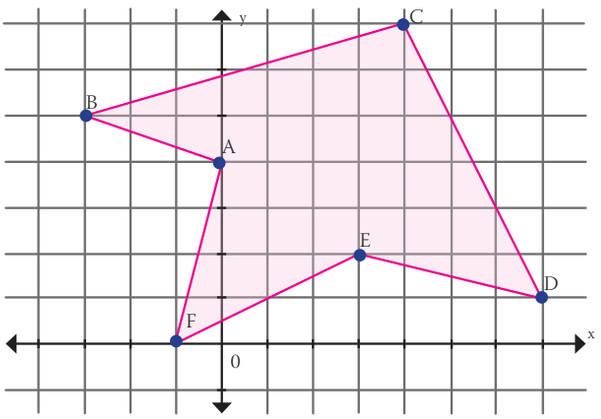
Empresa B : y=$2{,}500t+12{,}000$ donde y es la cantidad de dinero en quetzales y t es el tiempo en días.

a. Determina la cantidad de dinero recaudada por cada empresa al cabo de 1, 2, 5, 10 y 15 días.

b. Determina el momento exacto (tiempo) en que las dos empresas recaudan la misma cantidad de dinero (y).

c. Realiza la gráfica que permite hacernos una idea del comportamiento de las empresas.

7. Un programador de *software* desea insertar una imagen por medio de ecuaciones en cierto programa.



Determina las ecuaciones de cada recta que necesita el programador.

8. En dos estaciones de gasolina Terpel, se observó que el precio por galón de gasolina regular varió cada mes desde el comienzo del año 2020. En la estación A el precio inicial fue de Q25.23 y aumentó Q0.85 por mes. En la estación B el precio inicial fue Q25.83 y aumentó Q1.35 por cada mes.

a. Determina en cuál estación de gasolina hoy es recomendable llenar el tanque.

b. Determina el momento en que la gasolina tuvo el mismo precio en las dos estaciones.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 32 04/09/2023 14:34:12

Componente: Numérico-variacional

Aplicaciones de la función lineal

Aprendo

Para plantear una **función lineal** sigue los pasos a continuación:

Paso 1: Identifica la variable independiente. Llámala x.

Paso 2: Identifica la variable dependiente que será $f(x)$.

Paso 3: Analiza la relación entre las variables para determinar la función $f(x)=mx+b$.

Ejemplo

Camilo trota todas las mañanas y registra su tiempo y la distancia recorrida en la tabla que se presenta a continuación:

Tiempo (minutos)	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**
Distancia (metros)	750	1,500	2,250	3,000	3,750

a. ¿Qué relación hay entre el tiempo que Camilo trota y la distancia que recorre?

b. ¿Qué función permite modelar la situación?

c. ¿Cómo es la gráfica de esta función?

Puedes observar una proporcionalidad entre las dos cantidades del problema. En efecto:

$$\frac{750}{5}=150$$

$$\frac{1{,}500}{10}=150$$

$$\frac{2{,}250}{15}=150$$

$$\frac{3{,}000}{20}=150$$

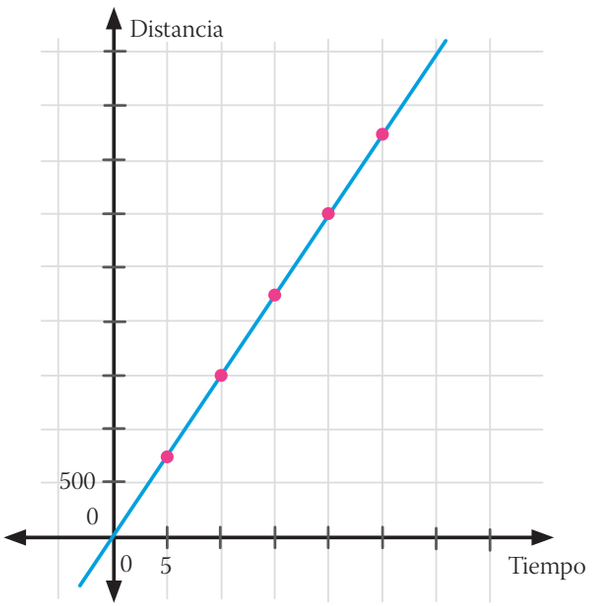
$$\frac{3{,}750}{25}=150$$

Paso 1: La variable independiente es el tiempo, pues Camilo puede elegir cuánto tiempo va a correr.

Paso 2: La variable dependiente es la distancia; esta cambiará de acuerdo al tiempo que Camilo corra.

Paso 3: Como las cantidades son proporcionales y su razón es 150, la distancia será siempre 150 multiplicado por el tiempo de ejercicio. Así, puedes escribir $f(x)=150\,x$.

- Al ubicar los puntos en el plano cartesiano obtienes una recta, como es de esperar.



Desempeño: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 33 04/09/2023 14:34:13

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. ¿Determina la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

- **a.** Cuando dos rectas tienen la misma pendiente, entonces son paralelas.
- **b.** Si el resultado de multiplicar las pendientes de dos rectas es –1, las rectas son perpendiculares.
- **c.** Si dos magnitudes son directamente proporcionales, entonces su función es lineal.
- **d.** Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, entonces su función es lineal.

2. Explica:

- **a.** ¿Qué relación existe entre la expresión $y=mx$ y $y=mx+b$?
- **b.** ¿Qué diferencia hay entre la ecuación general de la recta y la ecuación explícita de la recta?
- **c.** ¿Qué propiedades debe cumplir una función para considerarse lineal?

Razonamiento

3. Expresa mediante la ecuación general de la recta las siguientes rectas:

a. $y=\frac{2x-7}{4}$ **b.** $y=5x-8$ **c.** $y=\frac{4-5x}{2}$

4. Halla la pendiente *(m)* de la recta que pasa por los siguientes puntos y determina si es creciente, decreciente, indefinida o constante:

- **a.** (3,1) y (–3, –1)
- **b.** (0,–4) y (1,1)
- **c.** (1,–1) y (2,3)
- **d.** (–2,-3) y (0,5)

Solución de problemas

5. En un almacén, el sueldo quincenal de los empleados es Q 3,800.00 más Q 1,500.00 de comisiones por cada venta realizada. Escribe la ecuación que representa el enunciado anterior y halla el sueldo que recibe una persona que realiza 15 ventas.

6. Evalúa cada una de las funciones en los valores dados:

- **a.** $2x + 3y = 4$ en $x = -1$
- **b.** $4x + 5 = y$ en $x = 2$
- **c.** $y = 3x + 1$ en $y = -5$

7. Conforma un equipo de trabajo con tus compañeros y diríjanse a la tienda del colegio. Cada uno escoja un producto, pregunten su valor y la variabilidad en las ventas del mismo. Luego:

- **a.** Representen las ventas de tales productos en diferentes gráficas cartesianas.
- **b.** Hallen una función afín.

Determinen una función paralela y una perpendicular y expliquen: ¿qué aplicabilidad tendrían estos conceptos en su estudio?

8. Se está construyendo un edificio, por lo que los obreros deben estimar la cantidad de cemento que necesitarán dependiendo de los pisos que tendrá el edificio. Los datos se presentan en la siguiente tabla:

# Pisos	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de cemento en quintales	150	300	450	600	750	900	1,050

Luego de realizar los cálculos correspondientes, encontraron que el edificio necesita 50 quintales de cemento adicionales por un espacio en la construcción que no se había tenido en cuenta. Observa:

# Pisos	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de cemento en quintales	200	350	500	650	800	950	1,100

Halla la ecuación que representa la situación anterior y representa los datos de cada una de las tablas en una gráfica.

Sistema métrico internacional

Aprendo

Un **sistema de medida** es la representación normalizada de una serie de patrones fundamentales (medibles) con el fin de permitir el intercambio en las diferentes culturas y contextos.

1. **Sistema internacional de medida (SI):** sistema único ideal y global que adoptan los diferentes países, en los cuales se reglamentan y unifican sus unidades de medida.
2. **La unidad de medida** es el patrón cuantificable de una determinada magnitud, lo que conocemos en la vida cotidiana, como por ejemplo: libra, metro, segundo, etc.

Magnitudes y unidades

Existen 2 tipos de magnitudes: las **fundamentales** y las **derivadas**, estas últimas abarcan todas las posibles formas de medida que el hombre ha podido encontrar para relacionarse y comunicarse.

La clasificación está dada de la siguiente forma:

Magnitudes fundamentales: compuestas por un único patrón de medida o unidad elemental.

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	gramo	g
Tiempo	segundo	s

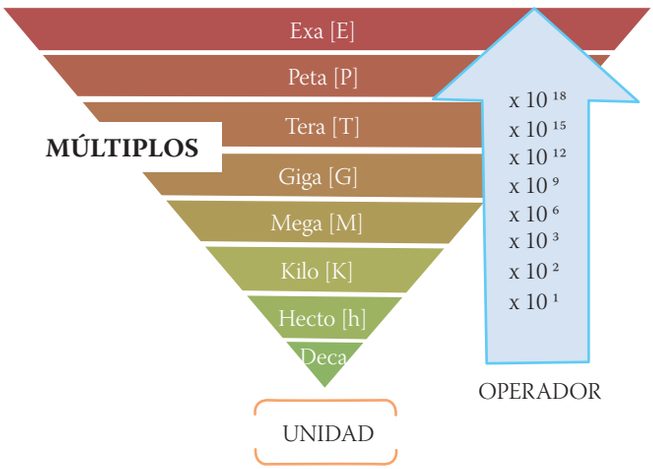
Magnitudes derivadas: compuestas por 2 o más magnitudes fundamentales.

Magnitud	Unidad	Símbolo
Área	Metro cuadrado	m^2
Volumen	Metro cúbico	m^3
Velocidad	Metro /segundo	m/s
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	kg/m^3

Múltiplos y submúltiplos

A continuación, se esquematizan los prefijos múltiplos y submúltiplos, los cuales nos permiten representar, simplificadamente, una determinada unidad fundamental es sus proporciones de base 10.

PREFIJOS DE LA UNIDAD DE MEDIDA



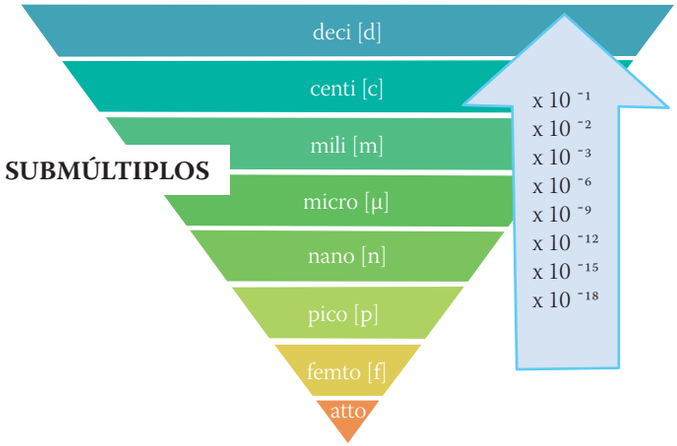
El esquema mantiene como punto central la unidad fundamental, ya sea metro, gramo, o segundo, la cual se puede representar multiplicando con el respectivo operador.

Desempeño: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 35 04/09/2023 14:34:15

Recuerda que...

El sistema internacional también conocido como MKS trabaja únicamente en las unidades de medida metro, kilogramo y segundos.



Las flechas indican la dirección desde la representación de la menor unidad de medida, en este caso el prefijo *atto*, hasta el prefijo mayor *Exa*.

Conversión de unidades

Para realizar **conversiones** entre los diferentes múltiplos y submúltiplos es necesario apoyarse de la siguiente estrategia para obtener los resultados adecuados de la conversión.

Conversiones entre:

Múltiplos a submúltiplos o viceversa	Solo múltiplos o solo submúltiplos
Caso 1: Para la conversión de múltiplo de mayor unidad a submúltiplo de menor unidad (peta a centi) se identifican las 2 unidades a convertir y se suman el valor absoluto de los exponentes de los factores, siendo el exponente final positivo. **Caso 2:** para la conversión viceversa, se suman el valor absoluto de los exponentes y el exponente final será negativo.	**Caso 3:** En esta situación para realizar únicamente las conversiones, ya sea de un múltiplo de mayor unidad a otro múltiplo de menor unidad, es necesario tener en cuenta lo siguiente: 1. Ubicar los factores de las unidades a convertir. 2. En los factores, realizar la resta algebraica de sus exponentes, lo cual dará como resultado el factor que ha de multiplicarse a la unidad inicial de conversión.

Ejemplo

Convertir 1 teragramo a centigramos

Para esta conversión se aplica el caso 1, debido a que el prefijo ***tera*** es múltiplo (mayor unidad) a ***centi*** que es submúltiplo de menor unidad. Posteriormente, ubicamos en el esquema los 2 prefijos con sus respectivos factores: $Tera\ (1\times10^{14})$ y $centi\ (1\times10^{-2})$

Se realiza la respectiva multiplicación $1\ Tg\times10^{(14+2)}=1\times10^{16}\ cg$

Por lo tanto, $1\ Tg$ equivale a $1\times10^{16}cg$

Convertir 3 milímetros a femtómetros

Es una conversión de unidades de longitud, la cual está ubicada en el caso 3 representada en conversiones de únicamente submúltiplos.

Se ubican los factores: $milimetro\ (\times10^{-3})$ $femtómetros\ (\times10^{-15})$

Se realiza la operación algebraica $3\ mm\times10^{(-3-(-15))}=1\times10^{12}\ fm$

Interpreta el espacio de manera analítica a partir de relaciones geométricas que se establecen en las trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 36 04/09/2023 14:34:17

Componente: Métrico geométrico

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Escribe verdadero (V) o falso (F) en las siguientes afirmaciones y justifica tu respuesta.

a. La velocidad es una magnitud y hace parte de las magnitudes fundamentales. ☐

b. El sistema métrico utiliza múltiplos y submúltiplos para cambiar el tipo de magnitud de un sistema. ☐

c. Los m^2 son unidades de medida de la longitud. ☐

d. Al realizar cambios entre múltiplos de medida, lo más conveniente es restar algebraicamente los exponentes ☐

e. Los submúltiplos del sistema métrico se utilizan para generar mayor precisión en las mediciones. ☐

2. Completa:

a. Para pasar de _____ a _____ es necesario multiplicar este valor por el _____ × 106.

b. Para representar 2,5 km a _____ es necesario multiplicar _____ por el _____ × 103.

c. Para convertir 1 000 dm a _____ se debe multiplicar _____ por el _____ m y el resultado es _____.

3. Relaciona con una flecha las magnitudes que representan igual cantidad de medida.

12 km	0,000012 m = $1{,}2 \times 10^{-5}$ m
1 000 mm	1 000 000 km = 1×10^{6} km
1 Gm	12 000 m = $1{,}2 \times 10^{4}$ m
12 000 nm	0,001 km = 1×10^{-3} km

Razonamiento y solución de problemas

4. Completa los procesos para las siguientes conversiones:

Conversión	Caso	Operador	Resultado
2,5 hm → mm	☐	(10^2 y 10^{-3})	$2{,}5 \times 10^5$ mm
☐	3	(10^{-12} y 10^{-3})	1×10^{-9} mm
7,6 am → nm	☐	☐	7,6 ×
☐	☐	(10^3 y ☐)	$8{,}2 \times 10^{-12}$ Pm
Idea un ejemplo			

5. Realiza las siguientes operaciones con los diferentes tipos de unidades, múltiplos y submúltiplos; recuerda que para sumar o restar unidades de medida se debe cumplir la condición de que se encuentren en la misma magnitud y unidad de medida con su respectivo nivel de multiplicidad. En caso de no estarlo, realiza la respectiva conversión.

Operar	Resultado
2 m + 200 mm – 20 cm	
1 km + 0,02 hm + 0,0001 Gm	
1 000 mm + 0,1 Mm +10 nm	
20 ng + 0,1 mg + 0,01 cg	
800 dm + 0,01 hm + 0,01 km	
$1{,}2 \times 10^3$ m + $1{,}3 \times 10^3$ m	

6. Argumenta tus respuestas:

a. ¿Por qué es importante utilizar un sistema unificado de medida?

b. ¿Qué consecuencias traería para la humanidad si no se hubiera implementado un sistema internacional de medidas?

c. ¿Por qué las medidas como el pie, el codo y el brazo no se implementaron en el sistema internacional?

Desempeño: Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 37 04/09/2023 14:34:17

Medidas de tendencia central y no central para datos agrupados

Aprendo

La **media** para datos agrupados es la sumatoria de los productos de la marca de clase por las frecuencias absolutas sobre el total de los datos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i f_i}{n}$$

La mediana:

Caso 1: Cuando $\frac{n}{2}$ coincide con la frecuencia acumulada N_i de cierto intervalo (a_i, a_{i+1}) con marca de clase c_i en el cual la mediana será el extremo superior del intervalo.

Caso 2: Cuando $\frac{n}{2}$ se encuentra entre dos frecuencias acumuladas N_{i-1} y N_i entre intervalos (a_{i-1}, a_i) (a_i, a_{i+1}), entonces la mediana se situará en algún lugar en el intervalo superior (a_i, a_{i+1}). Así llegamos a la ecuación:

$$\tilde{x} = a_i + \frac{\left(\frac{n}{2} - N_{i-1}\right)}{f_i}(a_{i-1} - a_i)$$

Donde a_i es el límite inferior del intervalo en el que n es la cantidad total de datos; N_{i-1} es la frecuencia acumulada anterior a la clase mediana; $a_{i-1} - a_i$ es la amplitud de intervalo; f_i es la frecuencia absoluta del intervalo.

La **moda** para datos agrupados es $x = a_i + \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}\right)(a_{i-1} - a_i)$.

f_i es la frecuencia absoluta del intervalo. f_{i+1} es la frecuencia absoluta del intervalo posterior.

f_{i-1} es la frecuencia absoluta del intervalo anterior. $a_{i-1} - a_i$ es la amplitud del intervalo.

Ejemplo

La siguiente tabla muestra el número de viajeros por edades que frecuentemente viajan de Guatemala a Tikal por una aerolínea. Para disfrutar de esta ciudad turística:

1. ¿Cuál es el promedio de edad de los viajeros frecuentes?
2. ¿Cuál es la edad más frecuente en la que los viajeros van a Tikal?

Edades *xi*	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)	[35,40)	[40,45)	[50,55)
fi	33	23	62	59	45	20	48	30	60

Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 38 04/09/2023 14:34:22

Edades *xi*	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)	[35,40)	[40,45)	[50,55)	Total
ci	7,5	12.5	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	52.5	
fi	33	23	62	59	45	20	48	30	60	380
Ni	33	56	118	177	222	242	290	320	380	
ci x fi	247.5	287.5	1,085	1,327.5	1,237.5	650	1,800	1,275	3,150	11,060

Luego calculamos la media, esto es: $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \times f_i}{n} = \frac{11,060}{380} = 29.1$$

La edad promedio de los viajeros frecuentes a Miami es de 29.1 años. Este es un dato estimado, no es exacto.

Por último, calculamos la moda, identificando la frecuencia más alta en la tabla, cuyo valor es 62, que se encuentra en el tercer intervalo.

El límite inferior es 15 y la amplitud del intervalo es 5. Aplicamos la ecuación:

$$x = a_i + \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}\right)(a_{i+1} - a_i)$$

$$x = 15 + \left(\frac{62 - 23}{(62 - 23) + (62 - 59)}\right) \times 5 = 15 + \left(\frac{39}{42}\right) \times 5 = 15 + 4.64 = 19.64 \cong 20$$

Las personas que viajan a Miami tienen, en su mayoría, 20 años.

Medidas de tendencia no central

Cuartiles: son medidas que dividen la cantidad de datos en cuatro partes porcentualmente iguales, esto significa que el primer cuartil contiene el 25 % de los datos, el segundo cuartil el 50 % y coincide con la media y el tercer cuartil abarca el 75 % de los datos. Se simboliza con la letra Q y se representa con Q_1, Q_2 y Q_3.

Para datos agrupados:

$$Q_k = a_i + \frac{\left(\frac{kn}{4} - N_{i-1}\right)}{f_i}(a_{i+1} - a_i)$$

Deciles: estos dividen el grupo de datos en 10 partes porcentualmente iguales. Esto significa que, según el decil, se encontrará el 10 %, 20 %, 30 % de los datos y así sucesivamente.

Para datos agrupados:

$$D_k = a_i + \frac{\left(\frac{kn}{10} - N_{i-1}\right)}{f_i}(a_{i+1} - a_i)$$

Percentiles: dividen el conjunto de datos en 100 partes porcentualmente iguales. Se simboliza con la letra P.

Para datos agrupados:

$$P_k = a_i + \frac{\left(\frac{kn}{100} - N_{i-1}\right)}{f_i}(a_{i+1} - a_i)$$

Desempeño: Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 39 04/09/2023 14:34:22

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Las siguientes son las edades de 35 empleados de hamburguesas El Llanero, un punto de venta, situado en el aeropuerto. El Dorado Luis Carlos Galán Sarmiento.

43, 22, 28, 18, 22, 30, 32, 33, 32, 30, 25, 23, 23, 19, 18, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 34, 35, 34, 23, 26, 27, 28, 29, 23, 34, 42, 34, 35, 26.

a. Agrupa los datos en 5 intervalos.

b. Encuentra la media para las edades de los empleados.

c. Halla la mediana y la moda de las edades de los empleados.

2. Encuentra los deciles 4 y 12 de la distribución 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 6, 6, 7, 8, 8, 10, 11, 14, 14, 15, 15, 16, 18.

Edad	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)
f_i	6	12	20	4	8	3

3. La tabla 2 muestra las edades en años de 53 empleados de vigilancia del Aeropuerto Internacional de Ciudad de México.

Solución de problemas

4. La tabla muestra una distribución de frecuencias de las calificaciones de la evaluación final de Filosofía en un colegio.

Calificaciones	N.º de estudiantes evaluados
[90,100]	9
[80,89]	32
[70,79]	43
[60,69]	21
[50,59]	11
[40,49]	3
[30,39]	1
	Total: 120

a. Halla los cuartiles Q_1, Q_2, y Q_3 de la distribución de frecuencias e interpreta el significado de cada uno.

b. Determina la calificación más baja lograda por el 25 % superior de la clase.

5. En un jardín infantil se registró el peso de 20 niños y niñas de 4 años para llevar un control de crecimiento y desarrollo, los datos registrados en kilogramos se presentan a continuación:

21.3, 20.8, 22.3, 24, 24, 23.5, 22.1, 22, 18.2, 19.3, 19.5, 20, 21, 17, 15, 14.5, 13.4, 17, 20, 21.

a. ¿En qué percentil se encuentra el peso 19,3 kg?

b. ¿Cuál es el decil 11?

c. ¿Cuál es el peso promedio de los niños y niñas medidos?

6. En el aeropuerto Charles de Gaulle de la ciudad de Paris se ofrecen varios medios de transporte terrestre para dirigirse a la ciudad. Uno de estos es el alquiler de coches prestado por empresas como Sixt, National, Europcar, Avis, Hertz, entre otras. Entre las 10:00 a.m y las 6:00 p.m., se registró la siguiente cantidad de autos en alquiler para cada una de las empresas, como lo muestra en la tabla 4:

Hora	Empresas					
	C_i	Sixt	National	Europcar	Avis	Hertz
10:00 - 11:00	10.5	5	12	5	4	8
11:00 - 12:00	11.5	15	4	2	6	9
12:00 - 13:00	12.5	3	6	10	3	4
13:00 - 14:00	13.5	12	2	2	8	7
14:00 - 15:00	14.5	4	7	4	5	6
15:00 - 16:00	15.5	10	3	2	1	3
16:00 - 17:00	16.5	13	8	6	7	8
17:00 - 18:00	17.5	18	10	9	4	11

a. Calcula el primer decil para cada una de las empresas.

b. Calcula el tercer cuartil para los datos de la empresa Hertz.

c. Calcula el percentil número 64 para los datos generados por las empresas.

Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 40 04/09/2023 14:34:23



Educación Económica y Financiera (E.E.F.)

Tasas de interés

Aprendo

En nuestro entorno económico existen diferentes alternativas de inversión y financiación que permiten suplir nuestras necesidades. Para ello, es necesario tener en cuenta un factor fundamental: la **tasa de interés**.

La **tasa de interés** es la que le da valor al capital y, por tanto, es conocida como el Valor del Dinero en el Tiempo (DVT). Esta puede ser vista desde dos perspectivas: una desde el ente que da el capital en uso, a lo que se le denomina **rentabilidad**, y la otra, de quien recibe capital ajeno, que recibe el nombre de **tasa de interés**.

El tiempo es un aspecto relevante en el sentido que no es lo mismo pedir un préstamo a corto plazo (menos de un año) que a largo plazo (mayor a un año), por lo tanto, las personas que ceden el capital corren mayor riesgo de que este no sea devuelto cuando se hace a largo plazo.

Exploro el tema

Usted dispone de las siguientes dos alternativas de inversión en un plazo de un año:

Inversión	Monto a invertir	Suma a recibir al cabo de un año
A	1 Millón	1,300,000
B	2 Millones	2,400,000

Resuelvo

Para decidirse por alguna alternativa, es necesario calcular la tasa de interés que ofrece cada una:

$i=(1{,}300{,}000/1{,}000{,}000-1)\times 100=30\ \%$

$i=(2{,}400{,}000/2{,}000{,}000-1)\times 100=20\ \%$

Por tanto, la mejor alternativa es la B, pues como se muestra en el ejercicio, ambas tienen el mismo tiempo, pero A tiene una tasa del 30 %, la cual representa un mejor rendimiento para el banco y menos rendimiento para el cliente. Veamos:

Si un banco presta Q1,000.00 pesos por un solo periodo, analizando las opciones anteriores, tenemos que:

$i=(1\ 300{,}000/1{,}000{,}000-1)\times 100=30\ \%$

$i=(2\ 400{,}000/2{,}000{,}000-1)\times 100=20\ \%$

Es por eso que se debe tener en cuenta el tipo de tasa que ofrecen los bancos para un préstamo.

Practico y aplico

Inversión	Monto a invertir	Suma a recibir al cabo de un año
A	2 mil	2,300
B	3 mil	3,400

1. Identifica cuál es la mejor alternativa para invertir.
2. Simula un préstamo de Q 10,000.00 y calcula lo siguiente junto con las tasas de interés del ejercicio anterior.
   a. ¿Cuáles son los rendimientos?
   b. ¿Cuál es mejor opción para el cliente? y ¿por qué?

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 41 04/09/2023 14:34:24



Evaluación tipo Saber

1. De acuerdo con la composición de los conjuntos numéricos, determina la respuesta **correcta:**

A. Todo número real es entero.

B. Todo número entero es real.

C. Ningún número entero es racional.

D. Ningún número real es racional.

2. Determina la respuesta **incorrecta:**

A. Cualquier entero es racional.

B. Ningún complejo es real.

3. Teniendo en cuenta las propiedades de la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación de los números reales, se puede afirmar que:

A. $r^2 \times r^3 = r^5$.

B. $(a + c)^6 = a^6 + c^6$.

C. $70 = 7$.

D. $3^2 + 5^2 = 8^4$.

4. Teniendo en cuenta las propiedades de la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación de los números reales sería **falso** afirmar que:

A. $6^9 \div 6^5 = 6^4$.

B. $125 \times 25 = 5^5$.

C. $321234^0 \cdot 321234^1 = 0$.

D. $3^2 + 4^2 = 5^2$.

5. Una forma de descomponer el número 2,560,000 en multiplicación de potencias de números, puede ser escrita de la siguiente manera:

A. 2×10^{23}.

B. 652×10^5.

C. 2.56×10^6.

D. 25.6×20^{17}.

6. Lee las siguientes afirmaciones y determina cuales son verdaderas.

I. Cuando dos rectas tienen la misma pendiente son paralelas.

II. Si al dividir las pendientes de dos rectas el resultado es -1 entonces las rectas son perpendiculares.

III. La ecuación de la recta esta dada de la forma $y = mx + b$

A. I y II **C.** II y III

B. I y III **D.** Ninguna de las anteriores

7. Un carro recorre en promedio 75 km/h. Teniendo en cuenta que x: distancia recorrida y t: tiempo. La expresión que relaciona el tiempo y la distancia recorrida es

A. $d = 75t$ **B.** $t = 75d$

C. $d = \frac{75}{t}$ **D.** $t = \frac{75}{d}$

8. De acuerdo con las propiedades de la radicación, se podría afirmar que

A. $\sqrt[3]{m \times n} = \sqrt[3]{m} \times \sqrt[3]{n}$. **C.** $\sqrt[5]{32} = \sqrt[3]{32} + \sqrt[2]{32}$.

B. $\sqrt[5]{r+s} = \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{s}$. **D.** $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$.

9. Al racionalizar el denominador de la expresión $\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ se obtiene como resultado

A. $\frac{27}{15}$ **C.** $3 \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})$

B. $6\sqrt[2]{5+3}$ **D.** $\sqrt{4}$

10. Si se tiene $5 + 3i$ y $9 + 2i$, ¿cuál es la respuesta de $(5 + 3i) + (9 + 2i)$ y de $(5 + 3i) \times (9 + 2i)$ correspondientemente?

A. (8i + 11i) y 88i

B. No hay respuesta

C. (7 + 12i) y (15 + 18i)

D. (14 + 5i) y (45 – 6) + (10i + 27i)

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 42 04/09/2023 14:34:28

11. La ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,2) y (–3,0) corresponde a

A. $f(x) = 3 + \frac{2}{3}x$

B. $f(x) = -2 + \frac{2}{3}x$

C. $f(x) = -3 + \frac{2}{3}x$

D. $f(x) = 2 + \frac{2}{3}x$

12. Al hallar la pendiente (m) de la recta que pasa por los puntos (–5,–5) y (0,5) es posible determinar que

A. $m = 5$, la recta es creciente.

B. $m = 2$, la recta es decreciente.

C. $m = -5$, la recta es decreciente.

D. $m = 2$, la recta es creciente.

13. Al hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (5,6) y (–5,–2) se obtiene

A. $y = \frac{4}{5}x + 2$

B. $y = \frac{4}{5}x - 10$

C. $y = \frac{4}{5}x$

D. $y = \frac{4}{5}x - 2$

14. Al hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,2) y (5,6) se obtiene

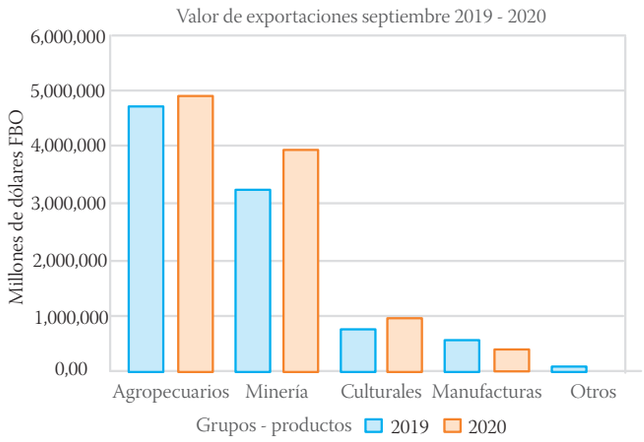
A. $f(x) = 4x - 2$

B. $f(x) = \frac{4}{5}x - 2$

C. $f(x) = \frac{5}{4} + 2$

D. $f(x) = \frac{4}{5}x + 2$

14. La siguiente gráfica muestra un comparativo entre las exportaciones en el mes de septiembre de 2020.



De la información presentada en la gráfica, se puede afirmar que en los meses de septiembre

A. las exportaciones en manufacturas en el 2020 fueron menores que en el 2019.

B. las exportaciones de algunos sectores fueron iguales en 2019 y 2020.

C. las exportaciones de agropecuarios fueron mayores en 2019 que en 2020.

D. el total de exportaciones en 2019 fue mayor que en 2020.

15. Para determinar el número de horas de refuerzo que necesitan los estudiantes de Estadística de una universidad, el profesor elaboró la siguiente tabla:

Horas requeridas para el refuerzo	N.º de estudiantes
17	24
21	18
27	26
37	10

El profesor decide que va a trabajar 21 horas de refuerzo, ese número de horas corresponde a

A. el promedio del conjunto de datos.

B. la mediana de los datos.

C. la moda del conjunto de datos.

D. la dispersión del conjunto de datos.

L9_Unidad_1_2021 Indiv.indd 43 04/09/2023 14:34:30

Unidad 2

Sistemas de ecuaciones, unidades y gráficas

¿Qué aprenderé?

- Sistemas de ecuaciones
- Conversión de unidades
- Análisis de gráficas estadísticas

¿Qué lograré?

- ✔ Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
- ✔ Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.
- ✔ Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.



Planteamiento de sistemas de ecuaciones

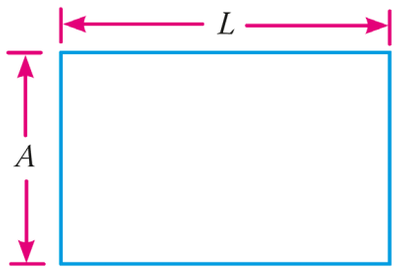
Aprendo

Ecuaciones lineales

Un conjunto de ecuaciones lineales de la forma $ax + by + c = 0$ con dos o más ecuaciones se llama un **sistema de ecuaciones lineales**. Si el sistema tiene 2 ecuaciones con 2 incógnitas, es un **sistema de ecuaciones lineales 2 × 2** y se representa como $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{cases}$ con a, b, c, d, e, f valores constantes. Si tiene 3 ecuaciones con 3 incógnitas, es un **sistema de ecuaciones lineales 3 × 3**, representado por $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ex+fy+gz+h=0 \\ ix+jy+kz+l=0 \end{cases}$ con $a, b, c, d, e, f, h, i, j, k, l$ constantes. En general, si el sistema de ecuaciones lineales tiene n ecuaciones con n incógnitas, se tendrá un sistema de ecuaciones lineales $n \times n$.

Ejemplo

El largo de un rectángulo excede a su ancho en 23 m. Tres veces el ancho excede en 15 m al largo. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?



Empecemos por expresar el problema en un lenguaje algebraico (sistema de ecuaciones lineales).

Sean A el ancho y L el largo del rectángulo, entonces tenemos:

$$\begin{cases} L = A + 23 & (1) \\ 3A = L + 15 & (2) \end{cases}$$

Por lo tanto, al despejar L en las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$\begin{cases} L = A+23 & (3) \\ L = 3A-15 & (4) \end{cases}$$

Igualando se tiene:

$$3A-15 = A+23$$
$$3A-A = 23+15$$
$$2A = 38$$
$$A = 19$$

Sustituyendo en (3) se tiene $L = 19 + 23 \Rightarrow L = 42$ m

Por lo tanto, el perímetro del rectángulo será

$$P = 2A+2B$$
$$P = 2(19\text{ m})+2(42\text{ m})$$
$$P = 38\text{ m}+84\text{ m}$$
$$P = 122\text{ m}$$

Si en lugar de sustituir en (3) lo hacemos en (4), tenemos $L = 3(19)-15 \Rightarrow 57-15 = 42$, es decir, L = 42 m llegamos al mismo resultado para L.

Desempeño: Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 45 04/09/2023 14:23:16

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. A continuación, se muestran los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Realiza la gráfica de cada sistema y encuentra el punto de intersección.

a. $\begin{cases} 2m+3p=-7 \\ m-p=10 \end{cases}$

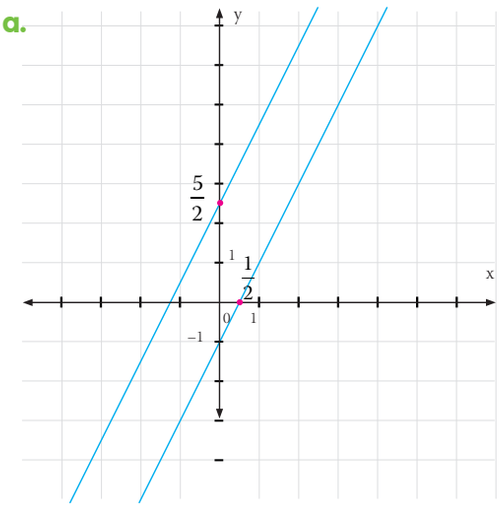
b. $\begin{cases} 2t-15=w \\ t+w=6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} c+8d=-1 \\ 4c-2d=3 \end{cases}$

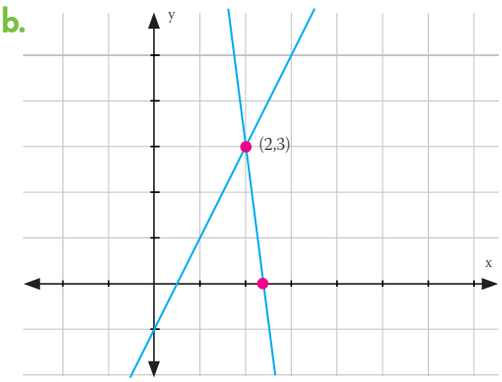
d. $\begin{cases} x-6y=7 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$

2. Observa cada una de las gráficas y plantea el sistema de ecuaciones lineales, indica si es un sistema consistente o inconsistente.

a.



b.



Solución de problemas

3. El número de canicas que reúnen Camilo e Isabella es 72. Si por cada canica que tiene Camilo, Isabella tiene 3, ¿cuántas canicas tiene Camilo y cuántas tiene Isabella?

4. El número de canicas que reúnen Camilo e Isabella es 72. Teniendo en cuenta que por cada canica que tiene Camilo, Isabella tiene 3, plantea las ecuaciones que describen la situación.

5. En muchos países, la población de hombres con respecto a mujeres es desigual. En algunos lugares del mundo la cantidad de mujeres es tres veces la cantidad de hombres. Imagina que en uno de estos lugares del mundo habitan 1,350,000 personas; entonces:

a. ¿Qué expresión algebraica representa la situación?

b. ¿Cuál es la cantidad de mujeres que existe?

c. ¿Cuál es la cantidad de hombres?

6. En promedio, una canción de *rock* sinfónico dura 7 minutos, mientras que las canciones de pop duran 4 minutos. Si una persona ha escuchado 110 canciones y el tiempo que ha gastado son 590 minutos:

a. ¿Cuál es la cantidad de canciones de *rock* sinfónico y de pop que ha escuchado?

b. ¿Existe algún modelo matemático que describa esta situación? ¿Cuál?

7. La suma de los tres ángulos internos de un triángulo es 180°. El ángulo mayor excede en 20° a la suma del ángulo mediano y el ángulo pequeño. La diferencia entre el ángulo mayor y el mediano es 30°.

a. ¿Cuál es el valor de cada uno de los ángulos?

b. ¿Es posible describir un sistema de ecuaciones que describa la situación? ¿Cuál?

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 46 04/09/2023 14:23:17

Componente: Numérico-variacional

Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2

Aprendo

El **método gráfico** para la solución de sistemas de ecuaciones lineales consiste en graficar las dos ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$. Al graficar las ecuaciones, podemos encontrar los siguientes casos:

Caso 1: si ambas rectas se cortan en un punto (x, y) entonces el sistema es **compatible determinado**.

Caso 2: si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas, entonces el sistemas es **compatible indeterminado**.

Caso 3: si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución y es **incompatible**.

Ejemplo

Si tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 3B-A=3 \end{cases}$$

Tomemos a B como dependiente de A y grafiquemos sus valores en el eje vertical, por lo tanto A estará en el eje horizontal. Realicemos entonces los siguientes pasos:

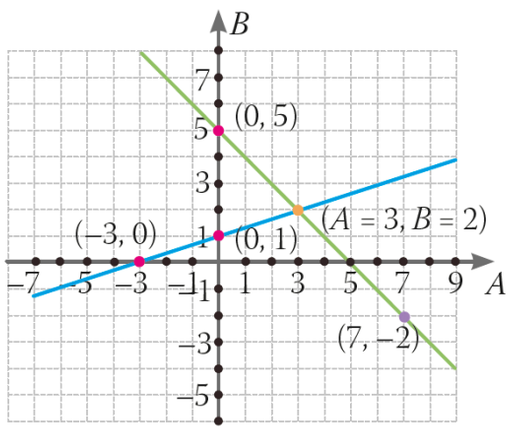
1. Despejar la variable dependiente (B para este caso) en ambas ecuaciones; esto es:

$$B = 5 - A \text{ y } B = \frac{A+3}{3}$$

2. Dar valores a la variable A para obtener correspondientes valores de B, esto es:

	$B = 5 - A$		$B = \frac{A+3}{3}$	
A	0	7	0	−3
B	5	−2	1	0

3. Ubicar las diferentes parejas ordenadas como lugares geométricos (puntos) en el mismo plano. Observa cómo las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (3, 2), esto implica que es el único punto en común que hace parte de las dos rectas. Su interpretación para las dos ecuaciones planteadas en el sistema corresponde a que son los valores $A = 3$ y $B = 2$ las únicas cantidades que validan las dos ecuaciones, es decir, las satisfacen.



Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 47 04/09/2023 14:23:17

Igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualarlas para obtener el valor de x o y, de acuerdo a quien se despeje. Puedes hacer los siguientes pasos:

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2. Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplos

Tenemos el siguiente par de ecuaciones:

$y = -4x-3$ o $y + 4x= -3$ $\qquad$ $y = 2x +3$ o $y - 2x = 3$

Paso 1: igualas ambas ecuaciones a y

$$\begin{cases} y = -4x-3 \\ y = 2x +3 \end{cases}$$

Paso 2: ahora igualas las dos expresiones que se encuentran en términos de x

$-4x - 3 = 2x +3$ igualando las dos expresiones

Paso 3: luego soluciona la ecuación, encontrando el valor de x

$$2x + 4x + 3 = -3$$
$$2x + 4x = -3 - 3$$
$$6x = -6$$
$$x = -\frac{6}{6}$$
$$x = -1$$

Paso 4: luego, reemplaza en la primera ecuación el valor encontrado *(x)* y encuentra el valor de y, observa:

$$y = -4\,(-1) -3$$
$$y = 4 - 3$$
$$y = 1$$

Sustitución

El **método de sustitución** consiste en sustituir una variable con una cantidad equivalente en términos de otra(s) variable(s) de manera que el número total de incógnitas se reduzca a 1. Puedes hacer los siguientes pasos:

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
5. Los dos valores obtenidos son la solución del sistema.

Ejemplos

Siguiendo con el ejemplo anterior, tenemos:

Paso 1: ya tienes despejada y = $-4x - 3$ en términos de x, así que vas a reemplazar su valor en la otra ecuación: $y - 2x = 3$.

Paso 2: sustituye el valor de y en $y - 2x = 3$

$$y - 2x = 3$$
$$\mathbf{-4x - 3} - 2x = 3$$

Paso 3: resuelve la ecuación

$$-4x - 2x = 3 + 3$$
$$-6x = 6$$
$$-x = \frac{6}{6}$$
$$(-1) \cdot (-x) = (1) \cdot (-1)$$
$$x = -1$$

Paso 4: luego, reemplaza en la primera ecuación el valor encontrado (x) y encuentra el valor de y, observa:

$$y = -4x - 3$$
$$y = -4\,(-1) -3$$
$$y = 4 - 3$$
$$y = 1$$

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 48 04/09/2023 14:23:18

Componente: Numérico-variacional

Eliminación

El **método de reducción** o **eliminación** consiste en eliminar una de las incógnitas x o y, para que quede una ecuación con una sola variable, se resuelve y el valor encontrado se sustituye en una de la ecuaciones originales para hallar el valor de la otra variable. Para emplearlo, puedes hacer los siguientes pasos:

1. Por medio de operaciones elementales, se hacen iguales los coeficientes de una de las incógnitas de las ecuaciones.

2. Se busca el m.c.m. de los coeficientes y este se divide entre cada uno de los coeficientes. Los cocientes que resulten serán los números por los cuales se deberán multiplicar cada una de las ecuaciones, respectivamente.

3. Modificada una o las dos ecuaciones, se procede a sumarlas o restarlas para eliminar una de las incógnitas de las ecuaciones, lo que dará como resultado el valor de la otra incógnita.

4. Se sustituye el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de las dos ecuaciones para encontrar el valor de la otra incógnita.

Ejemplos

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+y=12 \\ -3x+y=2 \end{cases}$$

Paso 1: puedes eliminar y, si se multiplica cualquier ecuación por el signo opuesto, obtenemos:

$$2x + y = 12$$

$$(-1)(-3x + y) = 2(-1)$$

Paso 2: teniendo en cuenta el sistema resultante,

$$\begin{cases} 2x+y=12 \\ 3x-y=-2 \end{cases}$$

opera los valores, quedando:

$$\begin{array}{r} 2x + y = 12 \\ 3x - y = -2 \\ \hline 5x + 0 = 10 \end{array}$$

Así, encuentras el valor de x.

$$5x = 10$$

$$x = \frac{10}{5}$$

$$x = 2$$

Paso 3: sustituye el valor de x en una de las ecuaciones y encuentra el valor de y

$$2x + y = 12$$

$$2\,(2) + y = 12$$

$$4 + y = 12$$

$$y = 12 - 4$$

$$y = 8$$

La coordenada solución del sistema de ecuaciones es: (2, 8)

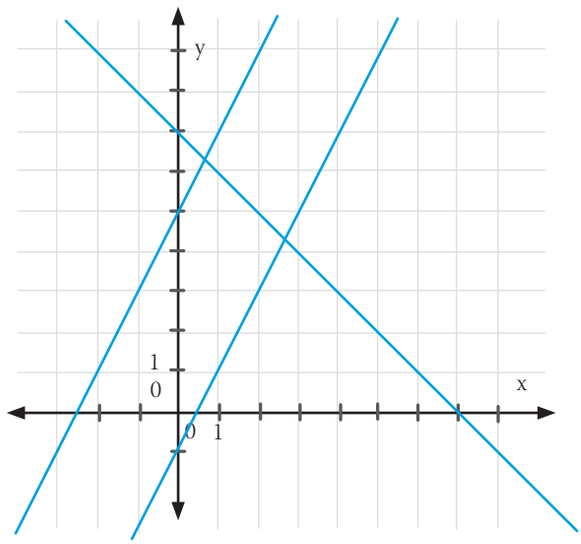
Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 49 04/09/2023 14:23:18

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. A continuación se encuentran las gráficas de 3 ecuaciones:



a. Halla las ecuaciones correspondientes a estas gráficas.

b. Para cada pareja de ecuaciones, soluciona el sistema de ecuaciones que se forma.

c. Relaciona las características de la gráfica con las soluciones obtenidas.

Razonamiento

2. En un plano se encuentran dibujadas dos rectas con las siguientes características:

- **Primera recta:** Pasa por (–10,7) y (3,–6) y el punto de corte en y es –3.
- **Segunda recta:** Pasa por (–5,–2) y (3,6) y el punto de corte en y es 3.

a. Escribe las ecuaciones de cada una de las rectas.

b. Realiza la gráfica de las rectas en un mismo plano cartesiano.

3. Grafica los siguientes sistemas y determina si son compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles:

a. $\begin{cases} -\frac{2}{3}t + 8v = -5 \\ 4t - \frac{8}{2}v = 13 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 12h + 15k = 0 \\ 24k + 30h = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -5x + 8y = 5 \\ -\frac{25}{5}x + \frac{64}{8}y = 5 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 83p - 13q = 1 \\ 11p + 17q = 7 \end{cases}$

4. Dados tres puntos, forma un sistema de ecuaciones donde A es la coordenada por la que pasa la ecuación 1, B es la coordenada por la que pasa la ecuación 2 y C es la intersección entre la ecuación 2 y en la cual

a. $A = (-2, 4)$, $B = (4, -2)$ y $C = (0, 8)$

b. $A = (0, 0)$, $B = (2, -8)$ y $C = (7,5)$

c. $A = (-1, 3)$, $B = (-4, 2)$ y $C = (-2, 0)$

Solución de problemas

5. Juan ha sufrido un accidente, así que debe arreglar su automóvil y encuentra dos talleres que le muestran las siguientes condiciones:

- En el taller del señor Torres le cobran Q 50.00 la hora por reparaciones de mano de obra.
- En el taller del señor Arango le cobran un diagnóstico del estado del automóvil por un valor de Q 30.00 más Q 40.00 la hora de reparación de mano de obra.

a. Si la mano de obra en la reparación cuesta lo mismo en ambos talleres, ¿cuánto tarda la reparación?

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 50 04/09/2023 14:23:19

Componente: Numérico-variacional

Sistemas de ecuaciones lineales de 3 × 3

Aprendo

Si en un problema dado se tienen tres incógnitas, debemos establecer tres ecuaciones simultáneas con las mismas tres incógnitas en cada una de ellas.

Ejemplo

Los 3 ángulos internos de un triángulo suman en total 180°. Tres veces el pequeño más dos veces el mediano exceden en 43° al grande, y dos veces el pequeño más una vez el grande excede en 23° a cuatro veces el mediano.

Comencemos por construir las ecuaciones a partir de la información dada.

$$\begin{cases} A+B+C=180 & I \\ 3A+2B-C=43 & II \\ 2A+C-4B=23 & III \end{cases}$$

Siendo: A = ángulo pequeño, B = ángulo mediano y C = ángulo grande.

A continuación, se enuncian los pasos que se deben seguir utilizando el método de eliminación. El propósito general es pasar de un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas a un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas, para finalmente resolverlo, para ello tenemos que:

Paso 1: escogemos dos de las tres ecuaciones y eliminamos una de las tres incógnitas, obtenemos así una ecuación con dos incógnitas.

Paso 2: seleccionamos una de las dos ecuaciones utilizadas en el paso anterior y la tercera, procedemos a eliminar la misma incógnita, obteniendo así otra ecuación con las mismas dos incógnitas.

Paso 3: se resuelve el nuevo sistema de ecuaciones de 2×2 por cualquiera de los métodos conocidos. De esta manera, se han determinado dos de las tres incógnitas que conforman el sistema original dado.

Paso 4: se sustituyen los dos valores obtenidos, en cualquiera de las tres ecuaciones originales, y calculamos el valor de la tercera incógnita.

Paso 1:

$$\begin{array}{rl} A+B+C=180 & (I) \\ 3A+2B-C=43 & (II) \\ \hline 4A+3B=223 & \end{array}$$

Paso 2:

$$\begin{array}{rl} 3A+2B-C=43 & (II) \\ 2A-4B+C=23 & (III) \\ \hline 5A-2B=66 & \end{array}$$

Paso 3:

$$\begin{array}{rl} 4A+3B=223 & (2) \\ 5A-2B=66 & (3) \end{array}$$

Paso 4:

$$\begin{array}{l} 8A+6B=446 \\ 15A-6B=198 \\ \hline 23A=644 \end{array}$$

$$\Rightarrow A=\frac{644}{23} \Rightarrow A=28°$$

$$\Rightarrow 5(28)-2B=66 \Rightarrow -2B=66-140$$

$$\Rightarrow B=\frac{-74}{-2}$$

$$\Rightarrow B=37°$$

$$28+37+C=180$$

$$C=180-65$$

$$C=115°$$

Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 51 04/09/2023 14:23:21

Regla de Cramer

En la **regla de Cramer** se usan los determinantes para encontrar la solución de determinados sistemas de ecuaciones lineales. A continuación, se describe la regla de Cramer para un sistema de ecuaciones de 3 × 3:

Dado el sistema $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \rightarrow$ con el arreglo de elementos $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

La solución del sistema viene dada por:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Es importante destacar que el arreglo rectangular D está formado por 3 filas y 3 columnas, por ejemplo, la fila 1 está formada por los elementos a_{11}, a_{12}, a_{13} y la columna 3 está formada por los elementos a_{13}, a_{23}, a_{33}. El subíndice que acompaña a cada elemento indica en qué fila y columna está ubicado el elemento en el arreglo. Así, el elemento a_{32} con subíndice 32 indica que el elemento está ubicado en la fila 3 columna 2.

Determinante de una matriz de 3×3

Para el caso de determinantes de matrices de orden 3 el algoritmo es un poco diferente. Existen varios métodos para obtener la determinante de una matriz de 3×3, uno de ellos se denomina **método de cofactores**.

Ejemplo

$$\text{Sea } B=\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -7 & 6 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Podemos tomar como referencia cualquiera de las tres filas o columnas. A continuación, obtendremos el determinante de la matriz B utilizando como referencia la columna 2. Procedemos a sombrear esta columna en nuestra matriz B.

$$B=\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -7 & 6 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Nos ubicamos en el elemento $b_{12} = 3$, eliminamos la fila 1 y la columna 2 de referencia, nos queda entonces la matriz $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ que tendría, según la rejilla de signos, un valor negativo.

Procedemos de manera similar para los elementos $b_{22} = 7$ y $b_{32} = 1$, obteniendo las tres matrices:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 52 04/09/2023 14:23:22

El siguiente paso consiste en elaborar una combinación lineal entre los elementos de la columna escogida como referencia y los respectivos determinantes asociados que, para nuestro ejemplo, corresponden a los determinantes de las matrices obtenidas anteriormente, esto es:

$$\det(B)=(-3)\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}+(-7).\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\det(B)=-3(22)-7(18)-1(26)$$

$$\det(B)=-66-126-26$$

$$\det(B)=-218$$

Ejemplo

Solucionemos el siguiente sistema de ecuaciones, empecemos por ordenar las ecuaciones cerciorándonos de *alinear* las incógnitas en las respectivas columnas, esto es:

$$\begin{cases} A+B+C=180 \\ 3A+2B-C=43 \\ 2A+C-4B=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=180 \\ 3A+2B-C=43 \\ 2A-4B+C=23 \end{cases} \Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz de coeficientes det( ) es:

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+(1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (1)[2(1)-(-4)(-1)]-(1)[3(1)-2(-1)]+(1)[3(-4)-2(2)]$$

$$= 1(2-4)-1(3+2)+1(-12-4)$$

$$= -2-5-16$$

$$= -23$$

Para determinar A:

$$A=\frac{\begin{vmatrix} 180 & 1 & 1 \\ 43 & 2 & -1 \\ 23 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-644}{-23}=28°,$$

por lo tanto, $A = 28^{o}$

Para determinar B:

$$B=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 180 & 1 \\ 3 & 43 & -1 \\ 2 & 23 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-851}{-23}=37°$$

por lo tanto, $B = 37^{o}$

Para determinar C:

$$C=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 180 \\ 3 & 2 & 43 \\ 2 & -4 & 23 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-2645}{-23}=115°,$$ por lo tanto C= 115°

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 53 04/09/2023 14:23:23

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. ¿Según la regla de Cramer, cómo se puede determinar si un sistema de ecuaciones lineales 3 × 3 tiene o no solución?

Razonamiento

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones simultáneas con tres incógnitas usando la regla de Cramer.

a. $\begin{cases} 2x-3y+8z=26 \\ -x+y+4z=-11 \\ 3x-2y+z=18 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -m-3n+4p=45 \\ m-5p=-7n+21 \\ n-3m=p+27 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2A-5B+C=4 \\ A+B+C=-6 \\ 7A+5B-2C=-20 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x_1-5x_2+8x_3=-38 \\ x_1+3x_2-2x_3=11 \\ 4x_3-2x_1=6x_2-22 \end{cases}$

3. Encuentra el valor de los siguientes determinantes 3 × 3.

a. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \pi \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

4. En el sistema que se presenta a continuación, ¿cuál debe ser el valor de k para que el sistema sea consistente?

$$2x+3y+z=23$$
$$x+5y-2z=-12$$
$$10x+ky+z=30$$

Solución de problemas

5. Sea: $T=\begin{vmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

a. Calcula la determinante de la matriz T, es decir, det (T).

b. Construye una matriz M a partir de la matriz dada intercambiando la primera y la tercera fila. Calcula la determinante de la nueva matriz, es decir det (M).

c. Compara los resultados obtenidos para det(T) y det(M). Elabora una definición o afirmación de lo observado.

6. Determina el valor de k en cada caso.

a. $j=\begin{vmatrix} -1 & 7 & 9 \\ k & 3 & 4 \\ -4 & 8 & 7 \end{vmatrix}$

$det(j)=30$

b. $N=\begin{vmatrix} 5 & -8 & k+1 \\ 2 & 3 & -4 \\ -23 & 16 & -11 \end{vmatrix}$; $\det(N) = -656$

7. La suma de las tres cifras de un número es 17. La suma de las centenas y las unidades es 10 y la diferencia entre las decenas y las unidades es 5. Halla el número.

8. Un carpintero hace sillas, mesas redondas y mesas cuadradas.

- Cada silla requiere 1 minuto de lija, 3 minutos de pintura y 1 minutos de barniz.
- Cada mesa redonda requiere 2 minutos de lija, 1 minuto de pintura y 1 minuto de barniz.
- Cada mesa cuadrada requiere 1 minuto de lija, 1 minuto de pintura y 3 minutos de barniz. Las máquinas de lijar, pintar y barnizar están disponibles 6, 6 y 5 horas por día, respectivamente.

a. ¿Cuántos muebles de cada tipo puede hacer el carpintero si las máquinas se usan a toda capacidad?

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

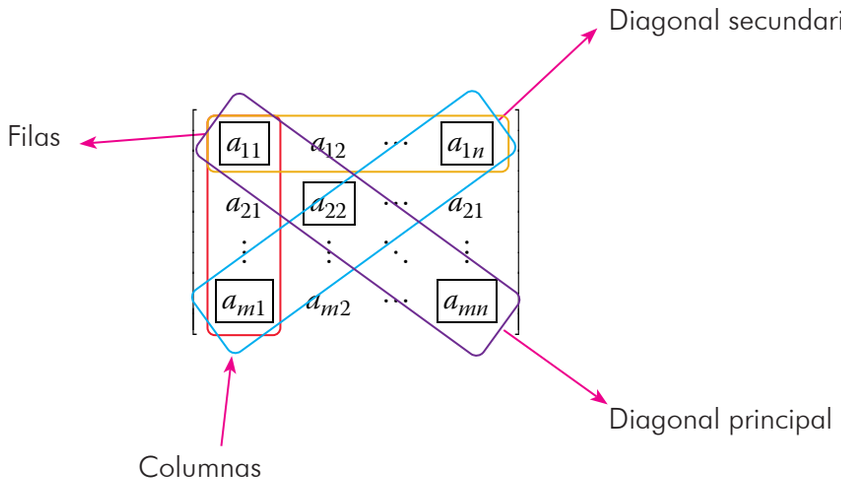
L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 54 04/09/2023 14:23:25

Componente: Numérico-variacional

Matrices

Aprendo

Una **matriz de orden** $m \times n$ es un arreglo rectangular en forma de caja, que representa a un conjunto finito de valores independientes que están organizados en m cantidad de filas y n cantidad de columnas.



En general, una matriz se representa así: $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$

Las matrices se denotan con letras mayúsculas y los elementos de la matriz se denotan a_{ij}, donde i corresponde a la fila que ocupa y j corresponde a la columna. El orden de la matriz está dado por m (número de filas) y n (número de columnas).

Se dice que dos matrices son iguales si cumplen las siguientes condiciones:

1. Que tengan el mismo número de filas y de columnas.

2. Cuando la cantidad que ocupa cada lugar en una matriz coincide con el que ocupa el lugar respectivo en la otra matriz, por ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ entonces } A = B$$

Clasificación de matrices

1. Matriz fila: matrices de una sola fila, pero que tienen varias columnas. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$

2. Matriz columna: al contrario de la matriz fila, tiene una sola columna, pero con varias filas. $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$

3. Matriz nula: matriz de cualquier orden, donde todos sus elementos son cero. $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Matriz cuadrada: matriz que tiene el mismo número de filas y columnas. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 55 04/09/2023 14:23:26

Dentro de las matrices cuadradas se encuentran unas matrices especiales:

a. Matriz diagonal: matriz donde todos sus elementos son cero, excepto la diagonal principal, que puede ser cero o no. $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$

b. Matriz escalar: matriz donde los elementos de la diagonal son iguales, y el resto de elementos, son iguales a cero. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

c. Matriz identidad: matriz donde los elementos de la diagonal son iguales a 1 y los demás son cero. Se denota con la letra I: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d. Matriz triangular inferior: matriz donde los elementos situados por encima de la diagonal principal, son 0: $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

e. Matriz triangular superior: matriz donde los elementos situados por debajo de la diagonal principal son 0. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

5. Matriz transpuesta: matriz que resulta de intercambiar filas por columnas de la matriz original.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

a. Matriz simétrica: matriz que es igual a su traspuesta. A es simétrica $\Leftrightarrow A^T = A$

b. Matriz antisimétrica: matriz igual a la opuesta de su transpuesta, es decir, A es antisimétrica $\Leftrightarrow A^T = -A$

6. Matriz opuesta: matriz $-A$ que tiene los mismos elementos que la matriz A, pero con signo cambiado.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad -A = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$$

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. En cada caso, determina el valor de k para que las matrices A y B sean iguales.

a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & (k+1) \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (k+1)(k-1) & k \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2k+3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

2. Escribe la matriz transpuesta de cada una de las siguientes matrices:

a. $M = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 5 & -8 & 3 \end{bmatrix}$

b. $N = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 6 & 7 \\ -10 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 56 04/09/2023 14:23:26

Componente: Numérico-variacional

Operaciones entre matrices

Aprendo

Para sumar o restar dos matrices, es necesario que sean del mismo orden, es decir, matrices de diferente orden no se pueden sumar o restar. Por lo tanto, la matriz resultante es del mismo orden.

Si $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ y $B=\left(b_{ij}\right)_{n\times m}$ entonces $A\pm B=\left(a_{ij}\pm b_{ij}\right)_{n\times m}$

Propiedades de la suma de matrices:

1. **Asociativa:** $A+(B+C)=(A+B)+C$
2. **Conmutativa:** $A+B=B+A$
3. **Elemento neutro:** Es la matriz nula.
4. **Elemento opuesto:** Dada una matriz A y su opuesta $-A$, la suma de ambas es igual a la matriz nula.

Ejemplo

$$f_1+f_2=\begin{bmatrix}32 & 40\\ 50 & 80\\ 70 & 20\end{bmatrix}_{3\times2}+\begin{bmatrix}40 & 60\\ 50 & 50\\ 130 & 20\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}32+40 & 40+60\\ 50+50 & 80+50\\ 70+130 & 20+20\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}72 & 100\\ 100 & 130\\ 200 & 40\end{bmatrix}_{3\times2}$$

Producto por escalar

Al **multiplicar una matriz** de cualquier orden **por un número real** cualquiera, se deben multiplicar todos los elementos de la matriz por ese valor. Es decir:

$$k\cdot A=(k\cdot a_{ij})$$

Propiedades del producto escalar por una matriz:

Sean A y B dos matrices de $m\times n$, $c\in\mathbb{R}$.

1. **Distributiva:** $c(A+B)=cA+cB$
2. **Conmutativa:** $(A\cdot B)c=(A\cdot c)\cdot B=(B\cdot c)\cdot A$
3. **Elemento neutro:** $1\cdot A=A$
4. **Elemento opuesto:** $-1\cdot A=-A$

Ejemplo

$$P=\begin{bmatrix}20 & 38 & 46\end{bmatrix}_{1\times3}$$

$$0.20\times P=[(0.20)20 \quad (0.20)38 \quad (0.20)46]$$
$$=[4 \quad 7.6 \quad 9.2]$$

Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 57 04/09/2023 14:23:30

Multiplicación entre matrices

Producto de una matriz $m \times n$ por otra $n \times p$

Para realizar el producto entre dos matrices A y B, el número de columnas de la matriz A debe ser exactamente igual al número de filas de la matriz B, obteniendo una matriz de orden $m \times p$. Esta nueva matriz va a estar conformada por elementos que corresponden a la sumatoria de los productos entre los elementos de las filas de la primera matriz por los elementos de las columnas de la segunda matriz.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} \boxed{A_1} \\ \boxed{A_2} \\ \boxed{A_3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \text{Fila 1} \\ \Rightarrow \text{Fila 2} \\ \Rightarrow \text{Fila 3} \end{matrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} \boxed{B_1} & \boxed{B_2} & \boxed{B_3} & \boxed{B_4} \end{bmatrix}$$

Columna 2, Columna 4 (⇑) sobre B_2 y B_4; Columna1, Columna 3 (⇓) bajo B_1 y B_3.

El producto de $A \times B$ será igual a:

$$A \cdot B=\begin{bmatrix} A_1 \cdot B_1 & A_1 \cdot B_2 & A_1 \cdot B_3 & A_1 \cdot B_4 \\ A_2 \cdot B_1 & A_2 \cdot B_2 & A_2 \cdot B_3 & A_2 \cdot B_4 \\ A_3 \cdot B_1 & A_3 \cdot B_2 & A_3 \cdot B_3 & A_3 \cdot B_4 \end{bmatrix}$$

Recuerda que...

El producto de una matriz fila y una matriz columna, da como resultado un número real.

$A \Rightarrow$ Matriz fila, de orden $1 \times m$ $A=a_i$

$B \Rightarrow$ Matriz columna, de orden $m \times 1$ $B=b_j$

Se define el producto de ambas matrices $A \bullet B=\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j$

$A=[5 \quad -1 \quad 3 \quad -2]$

$B=\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A \cdot B=(5 \cdot 8)+((-1) \cdot 3)+(3 \cdot (-2))+((-2) \cdot 1)=29$

Es la sumatoria de los productos del primer elemento de A por el primer elemento de B, el segundo elemento de A por el segundo elemento de B, y así sucesivamente.

Propiedades del producto entre matrices:

1. **Asociativa:** $A \cdot (B \cdot C)=(A \cdot B) \cdot C$
2. **Distributiva:** $A \cdot (B+C)=(A \cdot B)+(A \cdot C)$
3. **Elemento neutro:** $A \cdot I=I \cdot A=A$. La dimensión de I depende del tamaño de A.
4. **Escalar:** $k \cdot (A \cdot B)=(k \cdot A) \cdot B=A \cdot (k \cdot B)$, en donde k es un escalar.

El producto entre dos matrices **no** cumple con las siguientes propiedades:

5. **Conmutativa:** cuando se multiplican dos matrices el orden es importante, siempre se debe indicar cuál matriz va primero, razón por la cual no es un producto conmutativo.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

6. **Divisores de cero:** $A \cdot B=0$ no implica que $A=0$ o que $B=0$.

Ejemplo

$$A \cdot B=\begin{bmatrix} 8 & 13 & 6 & 6 \\ \boxed{6} & \boxed{12} & \boxed{7} & \boxed{8} \\ 7 & 14 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{3x\boxed{4}} \begin{bmatrix} \boxed{24} & 20 & 20 \\ \boxed{5} & 7 & 4 \\ \boxed{12} & 15 & 15 \\ \boxed{18} & 20 & 15 \end{bmatrix}_{\boxed{4}x3}$$

$$=\begin{bmatrix} 8 \cdot 24+13 \cdot 5+6 \cdot 12+6 \cdot 18 & 8 \cdot 20+13 \cdot 7+6 \cdot 15+6 \cdot 20 & 8 \cdot 20+13 \cdot 4+6 \cdot 15+6 \cdot 15 \\ \boxed{6 \cdot 24+12 \cdot 5+7 \cdot 12+8 \cdot 18} & 6 \cdot 20+12 \cdot 7+7 \cdot 15+8 \cdot 20 & 6 \cdot 20+12 \cdot 4+7 \cdot 15+8 \cdot 15 \\ 7 \cdot 24+14 \cdot 5+6 \cdot 12+7 \cdot 18 & 7 \cdot 20+14 \cdot 7+6 \cdot 15+7 \cdot 20 & 7 \cdot 20+14 \cdot 4+6 \cdot 15+7 \cdot 15 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 437 & 461 & 392 \\ \boxed{432} & 469 & 393 \\ 436 & 468 & 391 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 58 04/09/2023 14:23:32

Componente: Numérico-variacional

Potencia de una matriz cuadrada

Se define la n-ésima potencia de una matriz cuadrada como:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \quad \cdot A}_{n \text{ veces}}$$

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ halla A^4

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcula:

a. $A + B$
b. $A - B$
c. $-3A$
d. $-5A + 2B$
e. A^T
f. B^T

2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

a. ¿Cuál es su matriz opuesta?

b. Al realizar $-A + A$, ¿se obtiene la matriz nula de dimensión 2×2? Justifica tu respuesta.

3. Si

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 13 \\ 11 & -14 \end{bmatrix} \text{ y } A - 3B = \begin{bmatrix} -18 & 8 \\ -5 & -25 \\ -8 & -11 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles son los elementos de las matrices A y B?

4. Realiza el producto entre las dos matrices dadas:

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 10 \\ -5 & -25 \\ 4 & -11 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

5. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Calcula A^2, A^3, A^4, A^{100} y A^n

6. Halla x, y, z y w si

$$3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$$

Solución de problemas

7. Una industria produce dos tipos de tuercas: tuerca hexagonal *(H)* y tuerca mariposa *(M)*. De cada tipo se hacen tres modelos diferentes: A, B y C. La siguiente matriz representa la producción semanal de tuercas:

$$\begin{array}{c} \\ H \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2{,}000 & 2{,}500 & 3{,}000 \\ 2{,}500 & 3{,}500 & 4{,}000 \end{bmatrix} \end{array}$$

8. El porcentaje de tuercas defectuosas del tipo A corresponde a un $5\,\%$, del tipo B corresponde a un $4\,\%$ y del tipo C corresponde a un $2\,\%$. Determina el número de tuercas hexagonales y cuadradas que no son defectuosas.

Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 59 04/09/2023 14:23:34

Determinantes

Aprendo

Determinantes de segundo orden

El **determinante** de una matriz cuadrada es un número real y se calcula de la siguiente manera:

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$ Determinante de la matriz A $\Rightarrow |A| = a_{11}\times a_{22} - a_{21}\times a_{12}$

En el proceso se multiplican primero los elementos de la diagonal principal y luego se restan con el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (4\times 5)-(7\times 0) = 20$$

Determinantes de tercer orden

Sea A una matriz 3 × 3, su determinante de orden 3 vendrá dado por la regla de Sarrus:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Ejemplo

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = ((2\cdot 7\cdot 1)+(3\cdot 1\cdot 1)+(1\cdot(-4)\cdot 0)-(2\cdot 1\cdot 0)-(3\cdot(-4)\cdot 1)-(1\cdot 7\cdot 1)) = (22)$$

Determinantes de cualquier orden

Cuando tenemos una matriz de orden superior a 3 × 3, la manera de calcular determinantes, es la siguiente:

1. Se toma la posición a_{11} y se elimina tanto la fila como la columna de dicha posición.
2. Se multiplica a_{11} por el determinante de la matriz que queda.
3. Se procede de manera análoga con la posición a_{12} y luego con a_{13} hasta terminar con todas las columnas.

Ejemplo

$$v=\left\|\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\| = \left|1\left|\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| - 4\left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| + 2\left|\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| - 1\left|\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right|\right| = |(1\cdot(-10))-(4\cdot 4)+(2\cdot 11)-(1\cdot 0)| = |-4| = 4$$

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 60 04/09/2023 14:23:36

Componente: Numérico-variacional

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Dada la siguiente matriz, comprueba que $\det(A) = \det(A^T)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. La matriz B se obtiene intercambiando dos filas o dos columnas de la matriz A. Comprueba que $det(B) = -det(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Si se multiplican todos los elementos de una misma fila o columna por un número k, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número, es decir, $det(B)=k\ det(A)$. Dada la siguiente matriz, comprueba que se cumple la propiedad.

$$|A| = k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \text{ con } k = \{1,2,3,4\}$$

4. Dada la igualdad $|A| = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix}$, determina:

a. $|3A|$

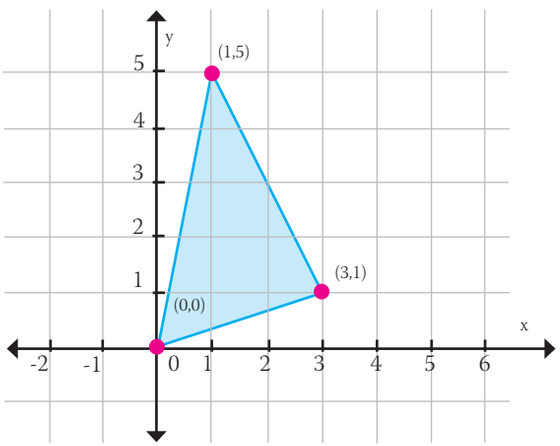
b. $|-A|$

c. $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix}$

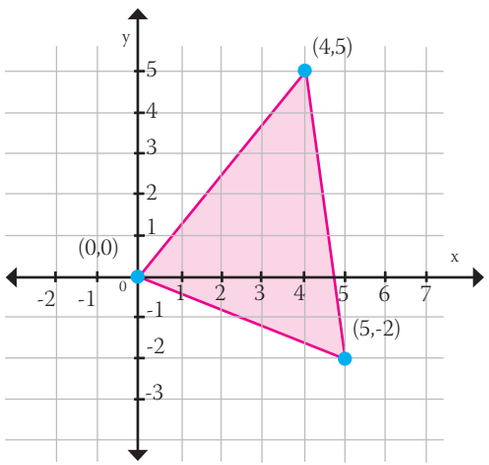
d. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

5. Dados los siguientes triángulos, halla su área empleando un determinante.

a.

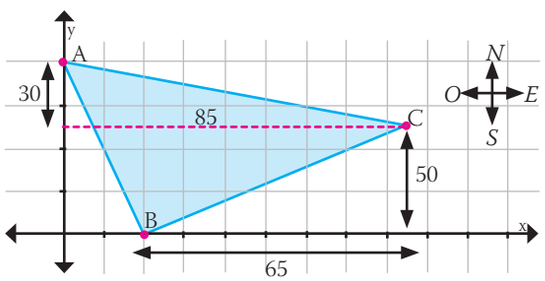


b.



Solución de problemas

6. El propietario de un terreno desea saber cuál es el área total del mismo, pero no tiene a la mano un metro para medir la longitud de sus lados, de tal manera que, recurre a medir con los pies y obtiene los siguientes datos: se ubica en el vértice B y camina 65 pies al este y 50 pies al norte al segundo vértice; luego, camina 85 pies al oeste y 30 pies al norte hacia el tercer vértice. La siguiente gráfica representa el área del terreno. Con la ayuda de un determinante ayuda al propietario a conocer cuántos pies mide el área del terreno.



Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 61 04/09/2023 14:23:38

Solución de sistemas de ecuaciones lineales empleando álgebra matricial

Aprendo

Solución por eliminación Gaussiana

Para emplear el método de **eliminación Gaussiana** se pueden hacer las siguientes operaciones, las cuales producen un sistema equivalente de ecuaciones lineales:

1. Intercambiar de lugar cualesquiera dos ecuaciones del sistema.
2. Multiplicar (o dividir) una de las ecuaciones entre cualquier número real distinto de cero.
3. Sumar un múltiplo de una ecuación a cualquier otra ecuación del sistema.

Ejemplo

Obtener la matriz aumentada del sistema de ecuaciones:

$$4T_1 - T_2 - T_3 = 160 \qquad -T_1 + 4T_3 - T_4 = 60$$

$$-T_1 + 4T_2 - T_4 = 140 \qquad -T_2 - T_3 + 4T_4 = 40$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 160 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 140 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 60 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \end{array}\right]$$

El método inicia haciendo todos los elementos debajo de a_{11} iguales a cero, siempre y cuando este elemento sea diferente de cero, es decir, te resulta una matriz con ceros en la primera columna, debajo del término a_{11}, haciendo operaciones por renglón. Estas operaciones se registran arriba de las flechas, observa:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 160 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 140 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 60 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_1 + R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 160 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{1}{4} & -1 & 180 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 60 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_1 + R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 160 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{1}{4} & -1 & 180 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{15}{4} & -1 & 100 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \end{array}\right]$$

Operas de la misma forma, pero ahora, haces cero los elementos debajo del término a_{22}:

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_4 + R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 160 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{1}{4} & -1 & 180 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -90 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + \frac{15}{4}R_4 \to R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 160 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{1}{4} & -1 & 180 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -90 \\ 0 & 0 & -4 & 14 & 330 \end{array}\right]$$

Ahora, haces cero los elementos debajo del término a_{33}:

$$\xrightarrow{R_3 - R_4 \to R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 160 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{1}{4} & -1 & 180 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -90 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -420 \end{array}\right]$$

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 62 04/09/2023 14:23:40

Por último, conviertes en ecuaciones la matriz y completas la solución mediante sustitución:

$-12\ T_4 = -420$
$T_4 = \dfrac{-420}{-12} = 35$

$-4\ T_3 + 2(35) = -90$
$T_3 = \dfrac{-90 - 70}{-4} = 40$

$\dfrac{15}{4}T_2 - \dfrac{1}{4}(40) - (35) = 180$
$T_2 = \dfrac{(180 + 35 + 10)\cdot 4}{15} = 60$

$4T_1 - 60 - 40 = 160$
$T_1 = \dfrac{160 + 40 + 60}{4} = 65$

Obtienes una solución única que indica el valor de cada variable.

Solución por regla de Cramer

La **regla de Cramer** se aplica a sistemas de ecuaciones lineales con la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas, donde el determinante de la matriz A sea distinto de cero. Todo sistema Cramer tiene una única solución dada por las expresiones:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Ejemplo

Tenemos el siguiente sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix},\quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 80 \\ 80 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Primero hallamos el determinante de A: $|A| = 192$. Como $|A| \neq 0$, entonces, empleamos el método de Cramer y así determinamos el valor de cada variable:

$$T_1 = \frac{\begin{vmatrix} 80 & -1 & -1 & 0 \\ 80 & 4 & 0 & -1 \\ 50 & 0 & 4 & -1 \\ 50 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6\ 960}{192} = \frac{145}{4} = 36{,}25$$

$$T_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 80 & -1 & 0 \\ -1 & 80 & 0 & -1 \\ -1 & 50 & 4 & -1 \\ 0 & 50 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6\ 960}{192} = \frac{145}{4} = 36{,}25$$

$$T_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 80 & 0 \\ -1 & 4 & 80 & -1 \\ -1 & 0 & 50 & -1 \\ 0 & -1 & 50 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{5\ 520}{192} = \frac{115}{4} = 28{,}75$$

$$T_4 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 80 \\ -1 & 4 & 0 & 80 \\ -1 & 0 & 4 & 50 \\ 0 & -1 & -1 & 50 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{5\ 520}{192} = \frac{115}{4} = 28{,}75$$

Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 63 04/09/2023 14:23:43

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Representa cada sistema de ecuaciones lineales como un producto de matrices y resuélvelo empleando el método de eliminación gaussiana.

a. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 3z = -1 \\ -x - y + 2z = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y + z = -3 \\ 4x - y = -5 \\ -3x + 2y + z = 4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ y + w = -4 \\ x - y = 1 \\ x + z + w = 1 \end{cases}$

2. Soluciona por la regla de Cramer los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -2x + 2y = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -x + 5y = 4 - 2x \\ 5 + y = x - 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 7x + y = -8 \\ 3y - 2x = 5 \end{cases}$

Solución de problemas

3. Un supermercado realiza el mismo pedido a tres proveedores diferentes: A, B y C. El pedido consiste en diferentes cantidades de jabones, papel higiénico y detergente. El precio de compra, dado por cada proveedor, se registra en la siguiente tabla (expresada en pesos por gramo):

Proveedor	Jabones	Papel higiénico	Detergente
A	0.8	4	3
B	1.2	4	2.5
C	1.2	4	3

El pedido enviado por el proveedor A tiene un valor de 2,000 quetzales; el enviado por el proveedor B tiene un valor de 60 quetzales más que el de A; y, por último, el pedido enviado por el proveedor C tiene un costo de 60 quetzales más que el enviado por B.

a. Determina el sistema de ecuaciones que modela el problema.

b. ¿Qué cantidad de jabón, papel higiénico y detergente compró el supermercado?

4. Un veterinario reúne un grupo de animales domésticos, completando un total de 20 mascotas entre perros, gatos y pájaros. Si contando a los perros y los gatos juntos, su número resulta ser el triple del número de pájaros, además, si hubiera un gato de más, su número se igualaría al de los perros,

a. plantea un sistema de ecuaciones que se ajuste a la situación y

b. encuentra cuántos perros, gatos y pájaros tiene el veterinario.

5. Leonardo, Marcela y Fabián son tres amigos. Leonardo le dice a Marcela: "Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad de dinero", calcula lo que tiene cada uno de ellos si se conoce que entre los tres reúnen Q6,000.00.

6. Si a la estatura de Camilo se le aumenta el triple de la diferencia entre las estaturas de Fernando y Alberto, Camilo sería igual de alto que Alberto. Por otro lado, ocho veces la estatura de Fernando es lo mismo que nueve veces la de Camilo. Finalmente, las estaturas de los tres jóvenes suman 515 centímetros. A partir de lo anterior,

a. construye un sistema de ecuaciones que represente la situación y

b. encuentra la estatura de Camilo, Fernando y Alberto.

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 64 04/09/2023 14:23:44

Componente: Numérico-variacional

Matriz inversa

Aprendo

Procedimiento para encontrar la inversa de una matriz cuadrada A:

Paso 1: Escribe la matriz aumentada $(A|I)$. La matriz identidad es del mismo tamaño que la matriz A.

Paso 2: Utiliza la reducción por renglones para convertir la matriz A en su forma escalonada reducida por renglones.

Paso 3: Decide si A es invertible:

1. Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se obtiene a la derecha de la barra vertical.

2. Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.

Ejemplo

Planteas el sistema de forma matricial $AX = B$:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 5 & 4\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}26{,}000\\ 35{,}000\\ 20{,}000\end{bmatrix}\quad X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

Para solucionar el sistema, debes hallar la inversa de la matriz de coeficientes A y multiplicarla por la matriz de términos independientes:

$$\begin{array}{ccc} A & & I_3 \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \xrightarrow{-2R_1+R_2\to R_2} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & & I_3 \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \xrightarrow{-R_1+R_3\to R_3} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & & I_3 \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] & \xrightarrow{-R_2+3R_3\to R_3} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] & \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2\to R_2} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] & \xrightarrow{-R_3\to R_3} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] & \xrightarrow{-\frac{2}{3}R_3+R_2\to R_2} & \\ & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] & \xrightarrow{-3R_3+R_1\to R_1} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & -2 & -3 & 9\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & -2 & -3 & 9\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] & \xrightarrow{-4R_2+R_1\to R_1} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] \end{array}$$

Ahora, partes de $AX = B$:

Multiplicas ambos lados de la igualdad por A^{-1} obteniendo $A^{-1}AX = A^{-1}B$

Como $A^{-1}A = I$, entonces te queda $X = A^{-1}B$

Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 65 04/09/2023 14:23:47

Por último, realizas el producto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 26{,}000 \\ 35{,}000 \\ 20{,}000 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 26{,}000 \\ 35{,}000 \\ 20{,}000 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3{,}000 \\ 5{,}000 \\ 1{,}000 \end{bmatrix}$$

Recuerda que...

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea invertible es que no sea singular, es decir, que su determinante sea diferente de cero, $|A| \neq 0$.

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Verifica que las matrices dadas sean inversas entre sí:

a. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

b. $=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0.25 & 0.5 & -0.25 \\ 0.25 & 0.5 & -1.25 \end{bmatrix}$

2. Determina la matriz inversa de las siguientes matrices binarias:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solución de problemas

3. Una tienda de ropa vende una clase de camisa a 12 000 pesos la unidad. Para el mes de enero, se realiza una rebaja del 30 % de descuento sobre el precio inicial, y para el mes de febrero, realizan un descuento del 40 % también sobre el precio inicial. Se vende un total de 600 camisas por un costo de $5 976 000 y, se sabe que con rebaja, han vendido la mitad de dicho total, ¿cuántas camisas se vendieron sin descuento, y cuántas con el 30 % y 40 % de descuento?

Razonamiento

4. Dado el siguiente sistema matricial:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a. Verifica:

$$X = A^{-1}B = A^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

b. Por otro lado, si B es la matriz resultante,

$$B=\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Verifica:

$$A^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 16 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Verifica que la siguiente matriz es no singular:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

6. Soluciona los siguientes sistemas de ecuaciones, empleando el método de la matriz inversa.

a. $\begin{cases} 2x-4y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+3y-z=5 \\ 3x+4y-z=2 \end{cases}$

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 66 04/09/2023 14:23:48

Componente: Numérico-variacional

Sistemas de inecuaciones

Aprendo

Sistemas con una variable

Un **sistema de inecuaciones lineales con una incógnita** es de la forma $\begin{cases} ax+b>0 \\ cx+d>0 \end{cases}$ con a,b,c,d constantes arbitrarias (el sistema se ha escrito con la desigualdad ">"; sin embargo, puede ser cualquiera de las otras "<, ≥, ≤", esto depende del significado de cada inecuación). El número de inecuaciones del sistema no tiene límites, es decir, puede ser mayor o igual a dos inecuaciones.

La **solución del sistema** se encuentra resolviendo gráficamente por separado cada una de las inecuaciones que lo conforman y realizando la intersección de las soluciones obtenidas (intersección de intervalos de solución). Si el sistema tiene solución, esta representará el conjunto de valores que satisfacen las inecuaciones del sistema (se escribe en forma de intervalo).

Se reconoce que **el sistema no tiene solución** cuando la intersección de las soluciones obtenidas al resolver cada una de las inecuaciones del sistema por aparte es vacía y se representa con el símbolo Ø.

Ejemplo

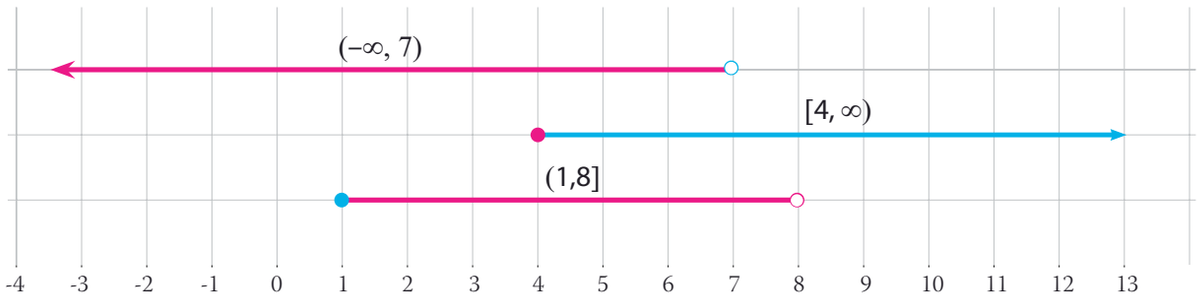
Grafica el siguiente sistema de inecuaciones y halla el intervalo solución:

$$\begin{cases} x+3 < 10 \\ 9-2x \leq 1 \\ 1 \leq x < 8 \end{cases}$$

Solución: la primera inecuación es equivalente a $x < 7$. La segunda ecuación se reduce con las propiedades:

$9-2x \leq 1$	restando 9 en ambos lados
$-2x \leq -8$	dividiendo entre –2 la desigualdad
$x \geq \frac{-8}{-2}$	invirtiendo la desigualdad al dividir entre un número negativo.
$x \geq 4$	simplificando

La gráfica de estas tres inecuaciones se presenta a continuación:



El intervalo solución es la intersección, que es [4,7).

Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 67 04/09/2023 14:23:49

Sistemas con dos variables

Un **sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas** es de la forma $\begin{cases} ax+by>k_1 \\ cx+dy>k_2 \end{cases}$ con a, b, c, d, k_1, k_2 constantes arbitrarias (se escribió la desigualdad "$>$" pero puede ser cualquiera de las otras "$<, \geq, \leq$"). Cada inecuación representa un semiplano que es la región solución de la inecuación.

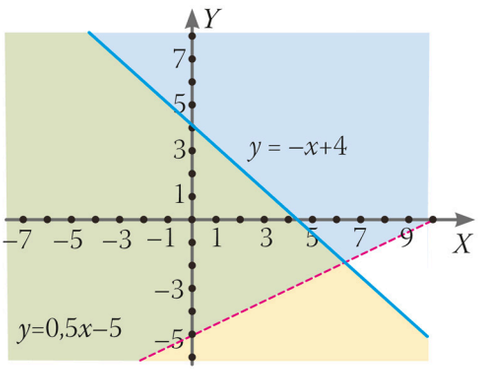
Un punto (x_0, y_0) es solución del sistema si lo es de cada una de las inecuaciones. El **conjunto de soluciones** del sistema es la región formada por la intersección de las regiones solución de cada una de las inecuaciones.

Ejemplo

Sea el sistema de inecuaciones $\begin{cases} y+x\leq 4 \\ y-\frac{1}{2}x>-5 \end{cases}$

Encuentra gráficamente su solución.

Solución: empecemos por graficar las dos rectas y los diferentes semiplanos:



El conjunto solución corresponde a todos los lugares geométricos o puntos que hacen parte de la región verde (superposición de la región azul y la amarilla).

El plano general quedó dividido en 4 subregiones; una de ellas en blanco, cuyos puntos no satisfacen ninguna de las dos inecuaciones; una región amarilla y otra azul, que satisfacen a una de las dos inecuaciones y la verde que ya hemos descrito en el párrafo anterior.

Al variar el sentido de las relaciones de orden en las dos desigualdades, estaríamos moviéndonos en una de las cuatro subregiones, como conjunto solución.

Para verificar, tomemos el punto de coordenadas $x = -4$; $y = 3$, que hace parte de la subregión descrita como solución, y reemplacemos los valores en las dos inecuaciones, esto es:

$$\begin{cases} y+x\leq 4 \\ y-\frac{1}{2}x>-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3-4\leq 4 \\ 3-\frac{1}{2}(-4)>-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\leq 4 \\ 3+2>-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\leq 4 \\ 5>-5 \end{cases}$$

Recuerda que...

El punto de intersección de las cuatro regiones en las que queda dividido el plano, coincide con las coordenadas que son solución de las mismas expresiones pero como ecuaciones o igualdades.

Las dos son verdaderas, por lo tanto, (−4, 3) es un elemento del conjunto solución.

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 68 04/09/2023 14:23:50

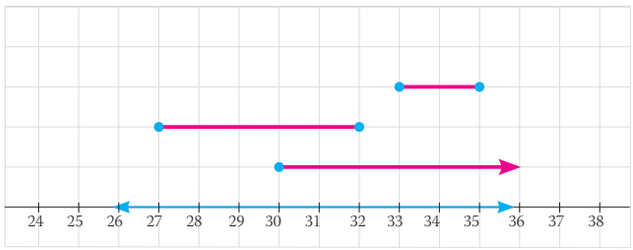
Componente: Numérico-variacional

Aplico mis conocimientos

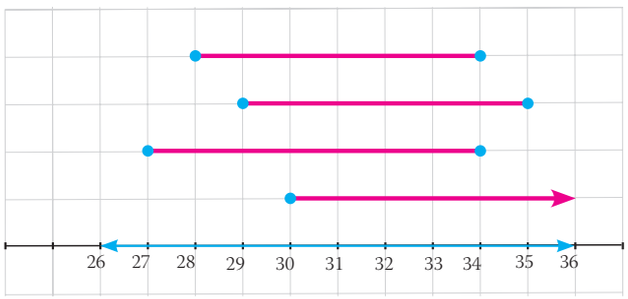
Comunicación

1. Para cada gráfica escribe las inecuaciones representadas y encuentra la solución del sistema.

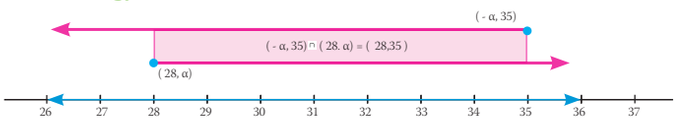
a.



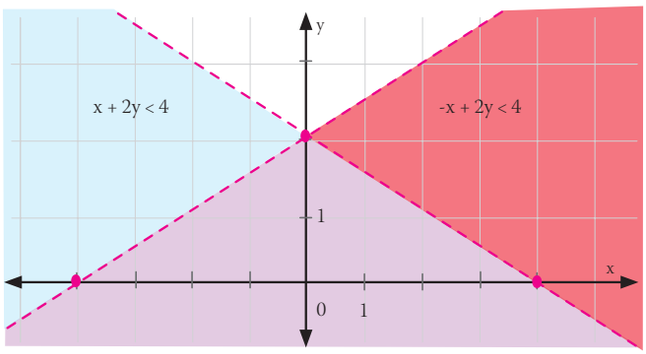
b.



c.



En la imagen se muestran las inecuaciones $x + 2y < 4$ en azul y $-x + 2y < 4$ en rojo.



2. ¿Qué ocurre en este sistema de inecuaciones? Justifica tu respuesta.

3. ¿Cuál es la solución del sistema?

Razonamiento

4. Resuelve cada sistema de inecuaciones:

a. $\begin{cases} -6m < 4(-12m + 16) \\ -32m - 62 \leq -10m \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{-9}{2} \geq 6x - 14 \\ 3(x + 5) < x \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 5 \leq -4x + 7 \\ 3x \geq -9 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + 5 \leq -4x + 17 \\ 3x \geq -9 \\ x < 0 \end{cases}$

Solución de problemas

5. Francisco juega canicas con Angélica y Felipe. Francisco tiene menos de 120 canicas. Angélica tiene 20 canicas más que el número de canicas que tiene Francisco, pero menos cantidad de canicas de las que tiene Felipe. Si Felipe tiene el triple de canicas que tiene Francisco, ¿cuántas canicas tiene Francisco?

6. Un número aumentado en 2 es mayor a 20. Si se sabe que es un número negativo, ¿existe tal cifra? Justifica tu respuesta.

7. La señora Martha vende globos y helados en el parque del barrio. Ella quiere vender el doble de globos que de helados, ya que le dejan mayor ganancia y no quiere vender menos de 20 helados. Si el globo lo vende a Q 5.00 y el helado lo vende a Q 2.00, y además, quiere obtener un ingreso por las ventas mayor a Q 300.00, ¿cuántos helados debe vender?

8. Andrés tiene Q 87.00 para comprar las camisetas que le gustan. Si cada camiseta costara Q 23.00, no le alcanzaría el dinero para comprarlas, pero si costaran Q 15.00, entonces le sobraría dinero. ¿Cuántas camisetas puede comprar?

Desempeño: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 69 04/09/2023 14:23:51

Conversión de unidades

Aprendo

Para convertir unidades de medida es necesario identificar que la magnitud sea la misma para que exista un sentido dimensional; sería incoherente tratar de convertir una medida de longitud a una medida de tiempo. Posteriormente, es importante identificar los **factores de conversión**, los cuales hacen posible encontrar la equivalencia entre un sistema y otro.

Internacionalmente, se han planteado sistemas de unificación de unidades, que nos permiten hacer operaciones normalizadas. El sistema internacional que se usa en nuestra región es el **MKS**, lo cual significa que todas las unidades que se manejen estarán convertidas en **metros, kilogramos y segundos**; este sistema facilita los cálculos en la física y en la ingeniería para que exista una coherencia uniforme y estandarizada en los procedimientos matemáticos.

Longitud y masa

A continuación, se muestra una tabla con los valores equivalentes entre el sistema MKS y el sistema internacional (SI):

Factores importantes de conversión			
Longitud		**Masa**	
Metro (m)	1 m = 39,37 in = 3,28 ft	Libra (lb)	453,6 g = 16 oz
Milla (mi)	1,609 km = 5 280 ft	Onza (oz)	28,35 g
Pie (ft)	12 in = 30,48 cm = 0,304 m	Kilogramo (kg)	2,205 lb
Pulgada (in)	2,54 cm	Slug (sg)	32,174 lb = 15,5 kg

Completa la siguiente tabla utilizando el factor de conversión adecuado según corresponda:

Magnitud	Metros	Kilogramos	Segundos
750 mi	1 206 750	NA	NA
2 350 g			
2 días			
72 in			
125 lb			

Ejemplo

Para resolver la primera conversión de la tabla anterior, 750 *mi*, iniciamos con la identificación del factor de conversión, así:

1 mi = 1 609 m (factor de conversión de milla a metro)
1 mi = 1 609 m (se plantea la regla de 3)
750 mi = x

$$x = \frac{750\ mi \times 1\ 609\ m}{1\ mi} = 1\ 206\ 750\ m$$

Recuerda que...

El factor de conversión entre dos unidades que selecciones funciona del mismo modo para cualquiera de las 2 conversiones que necesites. Por ejemplo, si es la conversión de *mi* a *m*, el factor igualmente funciona de *m* a *mi*.

Por otro lado, se debe tener en cuenta que la conversión realizada corresponde a una medida de longitud, por lo tanto, no aplica para la masa (kilogramos) ni para el tiempo (segundos).

Interpreta el espacio de manera analítica a partir de relaciones geométricas que se establecen en las trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 70 04/09/2023 14:23:51

Componente: Métrico-geométrico

Superficie y capacidad

Las unidades de medida de superficie se caracterizan por tener la **unidad elevada al cuadrado** (m^2, ft^2, mi^2, in^2) debido a que es el resultado de multiplicar dos magnitudes de longitud.

Las **áreas de las superficies** se pueden expresar en diferentes tipos de medidas, y para las conversiones hay que tener cuidado de no cometer el error de realizarlas como si fuesen unidades de medida lineal, ya que la proporción de las medidas es al cuadrado. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1: Convertir 150,000 cm^2 a m^2.

Para entender el proceso, es necesario revisar la siguiente igualdad para obtener el factor de conversión:

$1\ m^2 = 1\ m \times 1\ m = 100\ cm \times 100\ cm = 10{,}000\ cm^2$.

Por lo tanto, el factor de conversión de m^2 a cm^2 o viceversa equivale a $1\ m^2 = 10{,}000\ cm^2$.

Para el ejemplo, planteamos la regla de tres debido a que ya contamos con el factor de conversión que se dedujo por el análisis de las unidades.

$$1\ m^2 \rightarrow 10{,}000\ cm^2$$
$$x \rightarrow 150{,}000\ cm^2$$

Entonces tenemos como solución: $x = \dfrac{1\ m^2 \times 150{,}000\ cm^2}{10{,}000\ cm^2} = 15\ m^2$

Fíjate en que si se hubiese realizado por el factor de conversión de unidad métrica lineal $1\ m = 100\ cm$, los resultados serían totalmente diferentes y erróneos.

Medidas de capacidad o volumen

El mismo proceso se lleva a cabo para las medidas de capacidad o volumen, estas se obtienen al multiplicar 3 veces la magnitud de la longitud y su exponente en la unidad es 3 (m^3, cm^3, litros).

Ejemplo 2: Convertir $1\ m^3$ a cm^3

$$1\ m^3 = 1\ m \times 1\ m \times 1\ m = 100\ cm \times 100\ cm \times 100\ cm = 1{,}000{,}000\ cm^3$$

$$1\ m^3 = 1{,}000{,}000\ cm^3$$

Ejemplos

1. Encontremos el factor de conversión de m^2 a ft^2.

Planteamos la igualdad $\rightarrow 1\ m^2 = 1\ m \times 1\ m = 3.28\ ft \times 3.28\ ft = 10.76\ ft^2$

Con relación a lo anterior, se obtiene el factor de conversión de m^2 a ft^2, el cual es:

$1\ m^2 = 10.76\ ft^2$

2. Hallemos el factor de conversión de mi^2 a ft^2.

Planteamos una igualdad conociendo que el factor inicial de conversión $1\ mi = 5{,}280\ ft$

$$1\ mi^2 = 1\ mi \times 1\ mi = 5{,}280\ ft \times 5{,}280\ ft = 27{,}878{,}400\ ft^2$$

Se obtiene que el factor de conversión de mi^2 a ft^2 es $1\ mi^2 = 27{,}878{,}400\ ft^2$

Desempeño: Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 71 04/09/2023 14:23:52

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

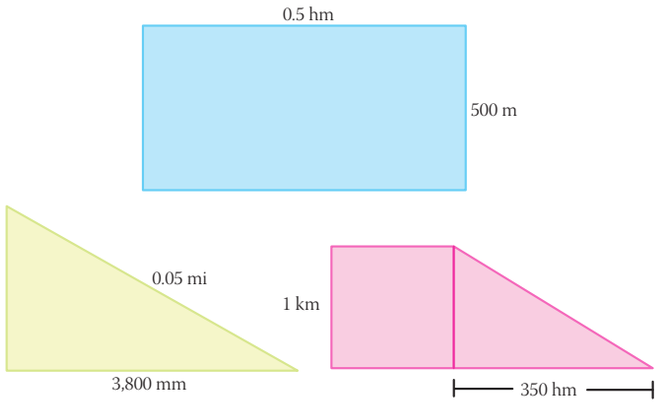
1. Argumenta tu respuesta a los siguientes cuestionamientos:

- **a.** ¿Cuál es la razón para que ciertas unidades de medida aparezcan elevadas al cuadrado?
- **b.** ¿Por qué es importante trabajar en un mismo sistema de medida?
- **c.** ¿Es posible convertir unidades de medidas lineales a superficiales? Justifica tu respuesta.
- **d.** ¿Cómo se pueden obtener las unidades de medida de capacidad?
- **e.** ¿Cuáles son las unidades de medida más utilizadas para la superficie y la capacidad en tu región?
- **f.** ¿Es posible convertir unidades de superficie a unidades de volumen?

2. Completa:

- **a.** Las magnitudes de _____ tienen la _____ de _____ elevada al cuadrado, se pueden realizar _____ entre diferentes _____, utilizando adecuadamente el _____
- **b.** Las _____ de volumen se obtienen de _____ las 3 dimensiones, y la unidad de _____ se expresa elevada al _____
- **c.** Un arquitecto diseña un _____ y debe tener en cuenta que las _____ de las unidades sean _____, para que los cálculos obtenidos estén _____.

3. Determina el área de las siguientes figuras geométricas en m^2.



Solución de problemas

4. Una empresa requiere contratar un pintor con experiencia y que su trabajo sea lo más rápido posible. En la presentación de la entrevista, se les solicita que pinten cierta área de una pared específica. El entrevistador contabiliza los tiempos obtenidos por los convocantes al pintar un área y esto es lo que encuentra:

Pedro: $10\ m^2/h$
Alex: $0.9\ cm^2/día$
Jorge: $2\ ft^2/min$

Después de revisar, ordena de menor a mayor la rapidez con la que realizaron el trabajo y se decide por el pintor que lo hizo más rápido. ¿A quién contrató?

5. Para llenar un estanque se tienen 2 llaves, las cuales proporcionan un caudal de agua constante por unidad de tiempo. La llave 1 proporciona una velocidad de llenado de $0.5\ m^3/min$, mientras que la llave 2 llena el tanque a $200\ cm^3/h$.

Con relación a la anterior información, responde:

- **a.** ¿Cuántos m^3 habrán suministrado en media hora cada una de las llaves?
- **b.** ¿Cuál de las dos llaves presenta un caudal de agua mayor?
- **c.** Si el tanque tiene una capacidad de $90\ m^3$, ¿cuánto tiempo tardará cada una de las llaves para llenarlo?

Interpreta el espacio de manera analítica a partir de relaciones geométricas que se establecen en las trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 72 04/09/2023 14:23:52

Componente: Aleatorio

Análisis de gráficas estadísticas

Aprendo

Histograma y diagrama circular

Un **histograma** es un diagrama de barras, formado por rectángulos ubicados en el plano cartesiano, donde las bases de cada uno se ubican en el eje horizontal (x), y en el eje vertical (y) se ubican las frecuencias.

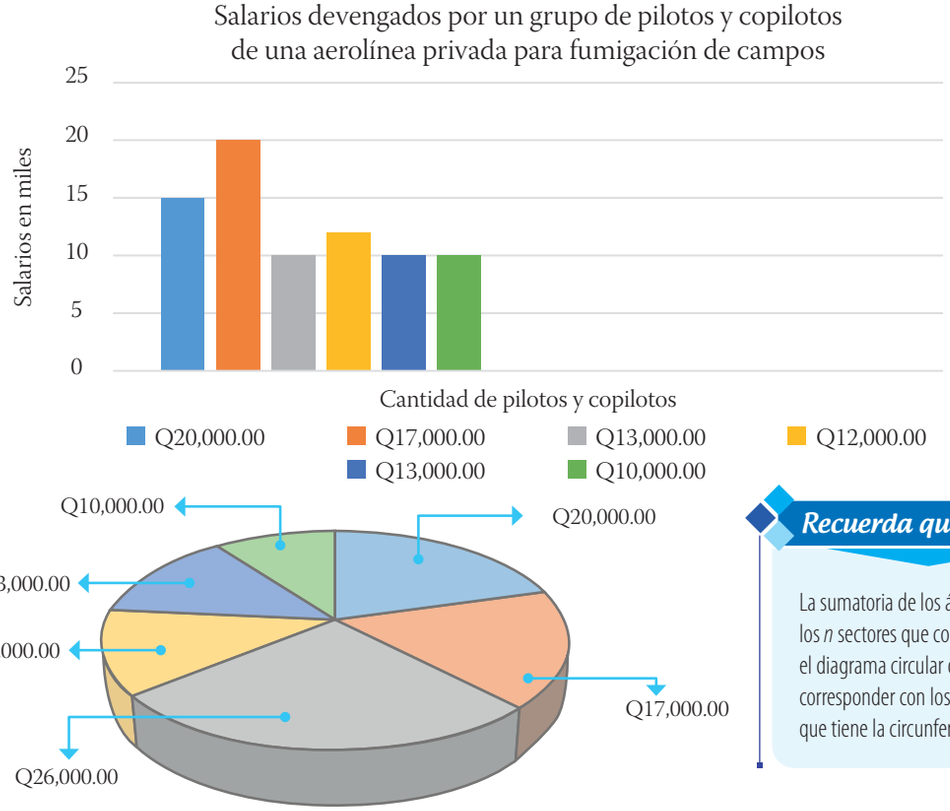
Un **diagrama circular** es también llamado **diagrama de sectores** o **diagrama de pastel**, este diagrama distribuye en su superficie sectores proporcionales a la frecuencia de cada dato de una variable cualitativa o cuantitativa discreta.

Ejemplos

Los salarios devengados por un grupo de pilotos y copilotos de una aerolínea privada para fumigación de campos se muestran en la siguiente tabla:

Cantidad de pilotos y copilotos	Salario($)
15	Q 20,000.00
20	Q 17,000.00
10	Q 26,000.00
12	Q 12,000.00
10	Q 13,000.00
18	Q 10,000.00

En diagrama de barras y diagrama circular construimos los gráficos que representan la información:



Recuerda que...

La sumatoria de los ángulos de los n sectores que componen el diagrama circular debe corresponder con los 360° totales que tiene la circunferencia.

Desempeño: Interpreta el espacio de manera analítica a partir de relaciones geométricas que se establecen en las trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones.

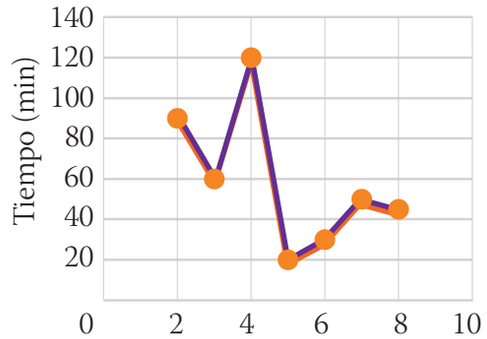
L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 73 04/09/2023 14:23:52

Diagrama de líneas

Un **polígono de frecuencias** o **diagrama de líneas** es un gráfico de línea trazado sobre las marcas de clase de una variable estadística que ha sido agrupada. Puede obtenerse uniendo los puntos medios de las barras en el histograma. Este polígono describe el comportamiento de la variable entre los intervalos.

Ejemplo

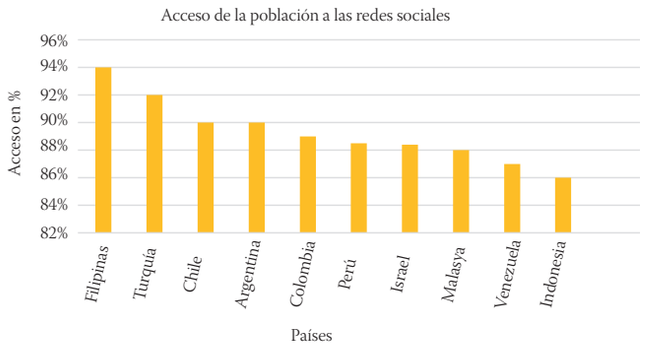
Graficando el ejemplo anterior, tenemos:



Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. El siguiente gráfico muestra el acceso a las redes sociales en el 2020 en algunos países. De acuerdo a la información suministrada por el gráfico, contesta:



- **a.** ¿Cuál es el país con menor acceso de los habitantes a las redes sociales?
- **b.** ¿Cuál es el país con mayor acceso de habitantes a las redes sociales?
- **c.** En Chile, ¿qué porcentaje de habitantes tiene acceso a las redes sociales?
- **d.** ¿Cuáles son los países que se encuentran en el rango de 82 % a 90 %? ¿Qué significa este resultado?

Solución de problemas

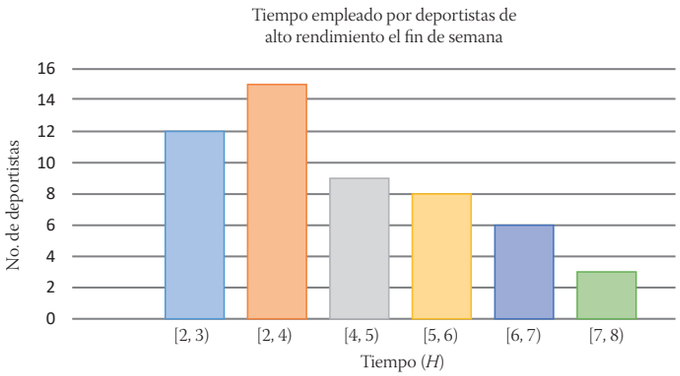
2. En un colegio, los estudiantes de grado noveno dieron a conocer sus preferencias en marcas de teléfonos celulares; los resultados de la encuesta se dan a continuación:

Marca de celulares	N.º de estudiantes
Samsung	42
Motorola	28
Nokia	11
Energy Sistem	9
Huawei	24

Halla las frecuencias relativas.

- **a.** ¿Cuál es la marca de celulares preferida?
- **b.** Construye un diagrama circular de la frecuencia relativa e interpreta los resultados.

3. La gráfica muestra el intervalo de horas de entrenamiento que son utilizadas por algunos deportistas en un centro de alto rendimiento los fines de semana.



- **a.** Realiza la tabla completa de distribución de frecuencias.
- **b.** Calcula la media de los datos.

Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización.

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 74 04/09/2023 14:23:52

La inflación

Aprendo

La inflación: en economía, es el aumento generalizado de los precios en los bienes y servicios existentes en el mercado durante cierto período de tiempo. Generalmente, este análisis se realiza de manera anual y se mide mediante el poder adquisitivo de la moneda, es decir, que por determinada cantidad monetaria, se puedan comprar más o menos bienes y servicios.

Para calcular la inflación, esta se debe presentar mediante un indicador porcentual y se calcula de la siguiente manera:

$$\frac{\text{(precio del año actual-precio de año anterior)}}{\text{(precio del año anterior)}} * 100 = \%$$

Ahora bien, veámoslo en un ejemplo:

Exploro el tema

A continuación se presentan los datos de 11 productos de la Canasta Básica en Guatemala que el Instituto Nacional de Estadística (INE) obtuvo en el mes de febrero de los siguientes años:

Productos de la canasta básica	2022	2023
Arroz 460 g	Q 6.16	Q 6.37
Avena de toda clase 460 g	Q 14.12	Q 13.74
Pan fráces 460 g	Q 8.60	Q 9.5
Pan dulce 460 g	Q 8.09	Q 8.95
Pasta de todos los tipos 230 g	Q 5.39	Q 5.48
Tortillas de maíz 46 0g	Q 4.36	Q 4.82
Carne de res sin hueso 460 g	Q 30.65	Q 31.66
Carne de res con hueso 460 g	Q 18.15	Q 19.47
Carne de cerdo sin hueso 460 g	Q 21.94	Q 23.19
Carne de pollo o gallina 460 g	Q 14.54	Q 14.9
Embullido 460 g	Q 14.35	Q 14.9
	Q 146.35	Q 152.98

De acuerdo con los resultados obtenidos de los gastos del 2022 y 2023, se puede analizar que la canasta básica ha subido Q6.63 para comprar los mismos productos.

Aplicamos la fórmula de inflación y obtenemos lo siguiente:

$$\frac{6.63}{146.35} = 0.045$$

El resultado lo multiplicamos por 100 para ponerlo en %.

$0.045 \times 100 = 4.5$ %. A este aumento porcentual es lo que le llamamos **inflación**.

Concluimos que la inflación para el año 2023 con respecto a 2022 es de 4.5%.

Practico y aplico

Consulta cuáles fueron las ciudades con mayor inflación para el año 2016 y elabora una lista de manera descendente.

1. Consulta otros productos de la canasta básica https://www.ine.gob.gt y elabora una lista de manera descendente.

2. Elige una lista de 5 productos para que puedas analizar cuál fue su inflación con respecto a los años consultados.

3. La siguiente tabla presenta la relación de costos de la Gasolina Superior de un año a otro. Calcula la inflación de todos los períodos con respecto al año anterior. https://mem.gob.gt/historico-precios-nacionales/

Año	Precio
2019	Q 26.40
2020	Q 22.69
2021	Q 29.36
2022	Q 37.52

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 75 04/09/2023 14:23:53

Evaluación tipo Saber

Comunicación

1. Camila quiere preparar una torta, se dirige al supermercado y compra una docena de huevos, una libra de harina y una botella de aceite. Al llegar a casa recuerda que desea compartir con su familia y que una torta no es suficiente, por lo que decide regresar al supermercado y compra una docena de huevos y dos botellas de aceite. Cuando llega a casa, recuerda que le faltó comprar más harina, regresa nuevamente al supermercado y en esta ocasión decide comprar una libra de harina y otra docena de huevos. En la primera ocasión gastó Q6.00, en la segunda ocasión se gastó Q6.50, y en la última compra gastó Q3.50.

¿Cuál es el precio de la docena de huevos?

A. Q 1.00 **C.** Q 2.00
B. Q 1.50 **D.** Q 2.50

2. Un grupo de amigos se reúne para ir de excursión. En total se reúnen 20 personas entre niños, mujeres y hombres. Contando entre la cantidad de mujeres y hombres que hay, resultan ser el triple de personas que el total de niños. Además, si hubiese asistido una mujer más, sería la misma cantidad de hombres.

¿Cuál es la cantidad de hombres que asistió a la excursión?

A. 8 **b.** 9 **C.** 10 **D.** 11

3. Se fabrican tres anillos A, B y C, cada uno con la siguiente composición de metales:

- **Anillo A:** 20 gramos de oro, 30 gramos de plata y 40 gramos de cobre.
- **Anillo B:** 30 gramos de oro, 40 gramos de plata y 50 gramos de cobre.
- **Anillo C:** 40 gramos de oro, 50 gramos de plata y 90 gramos de cobre.

Se quiere fabricar un nuevo anillo que contenga 34 gramos de oro, 46 gramos de plata y 65 gramos de cobre. ¿Qué peso se debe tomar de cada uno de los anillos para poder fabricar el nuevo anillo?

A. $\left(\frac{8}{15}, \frac{7}{30}, \frac{13}{30}\right)$ **C.** $\left(\frac{13}{30}, \frac{7}{30}, \frac{8}{15}\right)$

B. $\left(\frac{13}{30}, \frac{8}{15}, \frac{7}{30}\right)$ **D.** $\left(\frac{8}{15}, \frac{13}{30}, \frac{7}{30}\right)$

4. La solución del sistema $\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x + y + z = 6 \\ 2x - z = -1 \end{cases}$ es

A. x = 2; y = 1; z = 3
B. x = 1; y = 2; z = 3
C. x = 3; y = 1; z = 2
D. x = −3; y = 1; z = 2

5. ¿Se puede resolver un sistema que esté compuesto por tres ecuaciones y por tres incógnitas mediante la matriz inversa?

A. Siempre.
B. Cuando el rango de la matriz de coeficientes sea 3.
C. Siempre que no tenga dos filas proporcionales.
D. Siempre que no sea homogéneo.

En un supermercado se presenta el primer paquete de promociones por la temporada navideña:

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 76 04/09/2023 14:23:53

LLeve una libra de manzanas y dos de uva por Q65.40

Lleve tres libras de manzana y dos de uvas por Q94.20

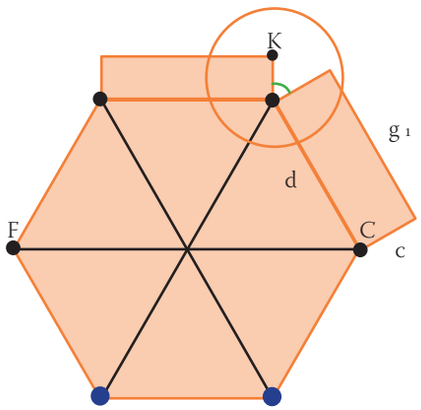
6. Si c representa las manzanas y p las uvas, las dos promociones se pueden expresar como:

A. $c + 2p = 65.40$ y $3c + 2p = 94.20$
B. $2c + p = 65.40$ y $2c + 3p = 94.20$
C. $c + p = 65.40$ y $2c + 3p = 94.20$
D. $2c + p = 65.40$ y $c + p = 94.20$

Responde las preguntas de la 7 a la 9 de acuerdo a la información y al gráfico que se muestra a continuación:

Se desea construir una fuente hexagonal de lado 2 m, y por cada lado se pondrán unas bancas rectangulares que ocupen todo el lado.

El diseño que se presenta es el plano que propone el arquitecto para llevar a cabo el proyecto.



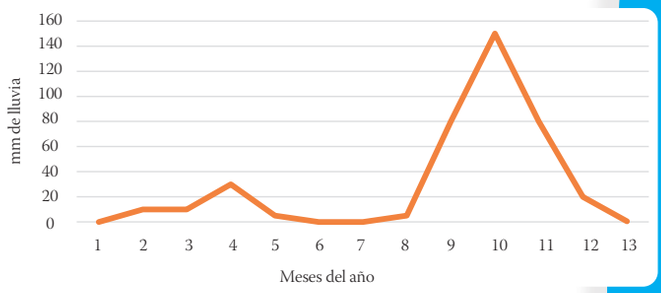
7. La estructura de la fuente es un hexágono regular, si la profundidad de la fuente es de 1 m, la cantidad de agua necesaria para llenar $\frac{1}{6}$ de la fuente equivale a

A. 2.9 m^3 **B.** 4.9 m^3 **C.** 3.9 m^3 **D.** 5.9 m^3

8. Se requiere recubrir con impermeabilizante el fondo de la fuente, con 1 mm de espesor. La cantidad necesaria para pintarlo es

A. 0.01 m^3 **B.** 0.02 m^3 **C.** 0.015 m^3 **D.** 0.025 m^3

La siguiente gráfica muestra el período de lluvias durante un año en el desierto.

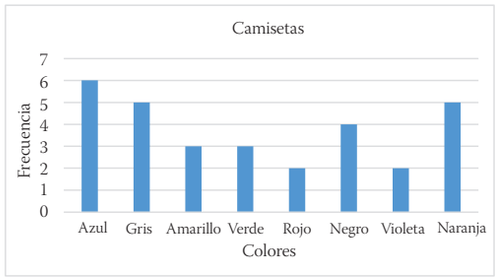


9. Teniendo en cuenta el período de lluvias que muestra la gráfica y que el tiempo de gestación de la cabra es de 5 meses, el mes del año en que debe darse la fecundación para garantizar el crecimiento de la cría es en

A. enero **B.** junio **C.** agosto **D.** octubre

10. Las amigas de Sofía depositan en una caja varias camisetas de colores diferentes, Sofía no puede ver los colores, pero puede tomar una. El número de camisetas de cada color que hay en la caja se muestra en la siguiente gráfica.

¿Cuál es la probabilidad de que Sofía tome una camiseta azul?



A. 15% **B.** 20% **C.** 25% **D.** 50%

L9_Unidad_2_2021 Indiv.indd 77 04/09/2023 14:23:54

Unidad 3

Funciones trascendentes, polígonos y conteo

¿Qué aprenderé?

- Ecuaciones e inecuaciones
- Polígonos
- Conteo

¿Qué lograré?

- ✔ Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.
- ✔ Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
- ✔ Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).



Función cuadrática

Aprendo

Tabulación

Una **función cuadrática** es una expresión de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$, donde $a,b,c\in R$ y $a\neq 0$. A estas funciones también se les llama **funciones de segundo grado**, dado que el máximo exponente que tiene la variable es 2.

Al reemplazar los valores de t en la ecuación se obtienen parejas ordenadas que se representan en una tabla.

Para tabular una función cuadrática de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ es necesario:

1. Evaluar la función en algunos valores de x reemplazándolos en la ecuación.
2. Elevar al cuadrado la variable x antes de realizar la multiplicación por la constante a.
3. Finalmente, realizar la suma y organizar los resultados en una tabla.

Ejemplo

Realizando el proceso de tabulación con la función $f(t)=-5t^2+20t$ se obtiene:

$f(1)=-5(1)^2+20(1)$
$f(1)=-5+20$
$f(1)=15$

$f(2)=-5(2)^2+20(2)$
$f(2)=-5(4)+40$
$f(2)=-20+40$
$f(2)=20$

t	$h(t)$
0	0
1	15
2	20
3	15
4	0

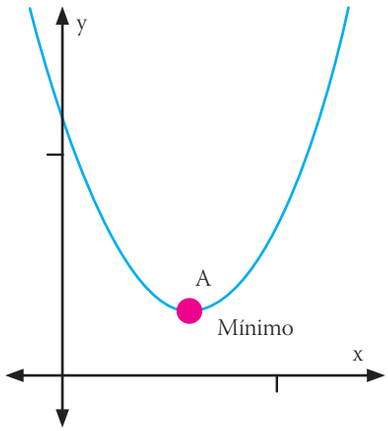
Parábola: gráfica de una función cuadrática

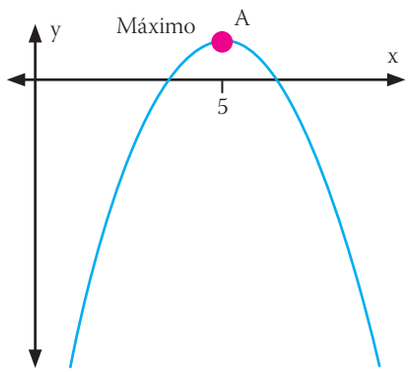
Para graficar una función cuadrática de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ se debe tener en cuenta:

Si $a>0$, la parábola abre hacia arriba y la función tiene un mínimo.

Si $a<0$, la parábola abre hacia abajo y la función tiene un máximo.

c es el corte de la parábola con el eje y.





Desempeño: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 79 04/09/2023 14:49:15

Eje de simetría y vértice de una parábola

Toda parábola tiene un **eje de simetría**, esta es una línea vertical que la divide en dos partes iguales.

1. El **eje de simetría** de una parábola vertical $f(x)=ax^2+bx+c$ es un valor de x donde se verifica que $x=\frac{-b}{2a}$.
2. El **vértice** de una parábola se halla evaluando la función en $x=\frac{-b}{2a}$. Sus coordenadas son $V=\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.
3. Si $a>0$, $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ es un valor **mínimo**.
4. Si $a<0$, $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ es un valor **máximo**.

Ideas clave...

A partir de las gráficas vemos que cuando una función cuadrática abre hacia arriba su rango es $\left[f\left(\frac{-b}{2a}\right), \infty\right)$. Si la función abre hacia abajo, el rango es $\left(-\infty, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$.

Ejemplo

Teniendo en cuenta la función del ejemplo anterior, hallamos el eje de simetría, el vértice, el máximo o el mínimo y la gráfica:

Paso 1: El eje de simetría es

$x=\frac{-b}{2a}$ $x=\frac{-20}{2(-5)}=\frac{-20}{-10}=2$

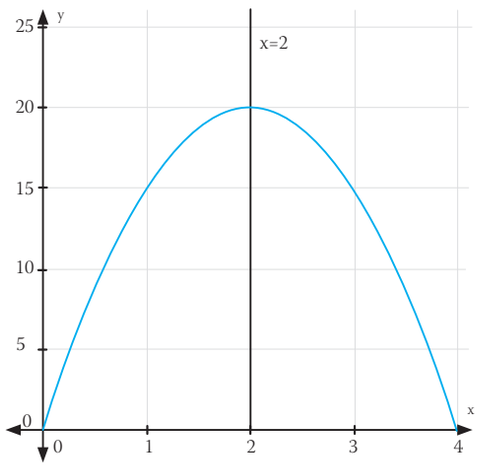
Paso 2: El vértice de la parábola es

$V=\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ $V=(2, f(2))$ $V=(2,20)$

Paso 3: $-5<0$, por lo tanto, $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ es un valor máximo

$f(2)=-5(2)^2+20(2$

$f(2)=20$



Ecuación estándar de una parábola

Toda función $f(x)=ax^2+bx+c$ se puede expresar como $f(x)=a(x-h)^2+k$ donde h es el eje de simetría y (h, k) es el vértice de la parábola.

Para esto se procede así:

1. Se agrupan los términos con x en $f(x)=ax^2+bx+c$ así: $f(x)=(ax^2+bx)+c$
2. Se extrae a como factor común: $f(x)=a\left(x^2+\frac{bx}{a}\right)+c$
3. Se completa el trinomio cuadrado perfecto en el paréntesis, dividiendo $\frac{b}{a}$ entre 2 y elevando al cuadrado.

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$

Componente: Numérico-variacional

Ejemplo

Tomando la función del ejemplo anterior,

$$f(t)=-5t^2+20t$$

Paso 1: Extrae –5 como factor común:

$$f(t)=-5\left(t^2-4t\right)$$

Paso 2: Completa trinomio cuadrado perfecto en el paréntesis:

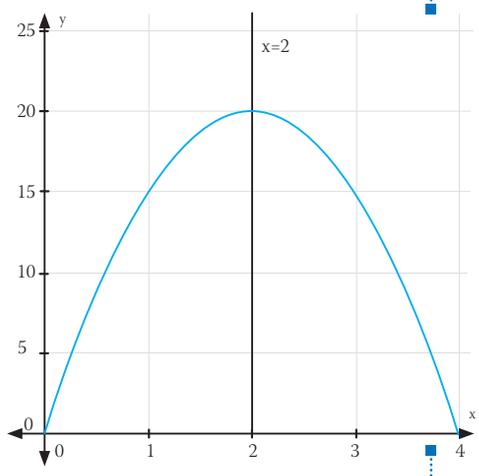
$$f(t)=-5\left(t^2-4t+\left(\frac{4}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{4}{2}\right)^2(-5)$$

$$f(t)=-5\left(t^2-4t+4\right)+20$$

Paso 3: Factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$$f(t)=-5(t-2)^2+20$$

$$h=2 \text{ y } k=20$$



Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. En los siguientes ejercicios, determina el eje de simetría y el vértice en cada caso:
   - a. $f(x)=x^2-6x$
   - b. $f(x)=x^2+4x-6$
   - c. $f(x)=-x^2-10x+2$
   - d. $f(x)=-2x^2-8x$
   - e. $f(x)=-3x^2+18x-5$
2. En los siguientes ejercicios, expresa cada función en la forma $f(x)=a(x-h)^2+k$
   - a. $f(x)=x^2-6x-7$
   - b. $f(x)=-x^2+10x-2$
   - c. $f(x)=2x^2+12x-9$
   - d. $f(x)=-3x^2-18x-5$
   - e. $f(x)=3x^2-24x+7$

Solución de problemas

En los ejercicios 3 a 7 encuentra la ecuación estándar de las parábolas que cumplen con la condición.

3. Vértice (8, 5) pasa por (3, 10).
4. Vértice (–7, –5) pasa por (–4, –8).
5. Vértice (–7, 15) pasa por (–5, 17).
6. Intersecciones con el eje x en –10 y –4 y el punto mínimo con coordenada $y = -9$.
7. Vértice (–4, 35) intersección en $y = 3$. Intersecciones con el eje x en –1 y 11 y el punto máximo tiene coordenada $y = 6$.
8. Un atleta realiza una prueba de salto largo alcanzando una marca de 8.4 m y una altura de 1.4 m. Determina la función que describe el movimiento del atleta. Sugerencia: Convierte los decimales a fracción.
9. Un camión llega a un puente con forma parabólica. El conductor se pregunta si el camión pasará por debajo del puente, dado que la altura máxima del mismo es 5.2 m y el ancho máximo del puente es 6 m en su base, mientras que la altura del camión es de 4 m, ¿cuál será el ancho máximo del camión para que pueda pasar? Sugerencia: Convierte los decimales a fracción.

Desempeño: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 81 04/09/2023 14:49:21

Ecuación cuadrática

Aprendo

Métodos de solución

Teorema del factor cero: si p y q son expresiones algebraicas, entonces $p \cdot q = 0$ si y solo si $p = 0$ o $q = 0$.

Ejemplo

Método de factorización: para usar el método de factorización, es necesario que la ecuación esté igualada a cero y se resuelve así:

$1{,}500 = 10x^2 - 150x + 500$	Ecuación
$10x^2 - 150x + 500 - 1{,}500 = 0$	Sumando $-1{,}500$ a cada lado de la ecuación
$10x^2 - 150x - 1{,}000 = 0$	Restando
$\frac{10x^2 - 150x - 1{,}000}{10} = \frac{0}{10}$	Dividiendo toda la ecuación entre 10
$x^2 - 15x - 100 = 0$	
$(x - 20)(x + 5) = 0$	Factorizando la expresión
$(x - 20) = 0 \quad o \quad (x + 5) = 0$	Aplicando el teorema del factor cero
$x = 20 \quad o \quad x = -5$	Despejando x

Ecuaciones de la forma $x^2 = d$

Al analizar las ecuaciones cuadráticas, los estudiantes encuentran que al resolver $x^2 = d$, la variable x tiene más de un valor, y el profesor les explica que si $d > 0$ se obtienen dos raíces: una positiva y otra negativa.

Ejemplo

$$(x-3)^2 = 16$$

$$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{16}$$

$$x = \pm 4 + 3$$

$$x_1 = 4 + 3 = 7 \quad y \quad x_2 = -4 + 3 = -1$$

Completando cuadrados

Si la expresión es de la forma $ax^2 + bx \quad o \quad ax^2 - bx$, se completa el cuadrado sumando $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ para reescribir la expresión como un binomio al cuadrado y hallar la solución de la ecuación:

Ejemplo

$$x^2 + 6x = -7$$

$$x^2 + 6x + 9 = -7 + 9$$

$$x^2 + 6x + 9 = 2$$

$$(x+3)^2 = 2$$

$$x + 3 = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \pm\sqrt{2} - 3$$

$$x_1 = \sqrt{2} - 3 \quad y \quad x_2 = -\sqrt{2} - 3$$

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 82 04/09/2023 14:49:25

Componente: Numérico-variacional

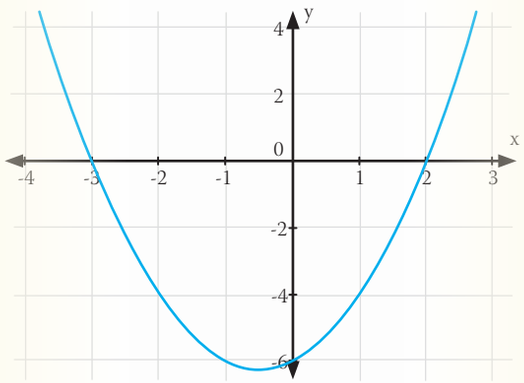
Ecuación cuadrática

Si a, b, c son números reales y $a \neq 0$, las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ están dadas por la expresión: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Esto es $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

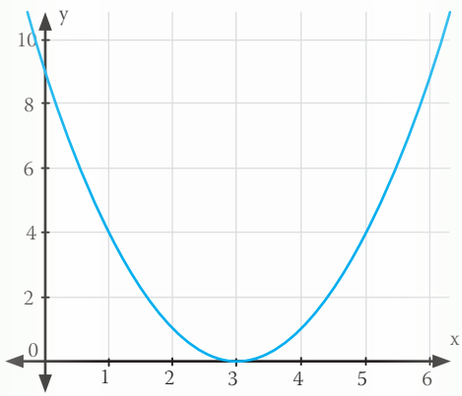
1. Si $b^2-4ac>0$, la ecuación tiene una única solución:

En $x^2+x-6=0$, $a=1, b=1$ y $c=-6$; el valor del discriminante es $(1)^2-4(1)(-6)=25$ luego la ecuación tiene dos soluciones distintas.



2. Si $b^2-4ac=0$, la ecuación tiene una única solución:

En $x^2-6x+9=0$, a = 1, b = -6 y c = 9; el valor del discriminante es $(-6)^2-4(1)(9)=0$ luego la ecuación tiene una solución que corresponde al valor de $\left(\dfrac{-b}{2a}\right)=\left(\dfrac{-(-6)}{2(1)}\right)=\dfrac{6}{2}=3$

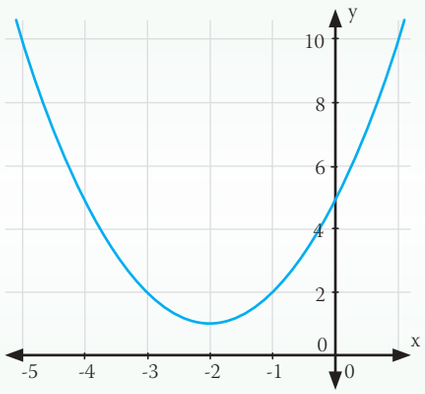


Desempeño: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 83 04/09/2023 14:49:26

3. Si $b^2-4ac<0$, la ecuación no tiene soluciones en los reales, en cambio tiene dos soluciones complejas:

En $x^2+4x+5=0$, $a=1$, $b=4$ y $c=5$; el valor del discriminante es $(4)^2-4(1)(5)=-4$ luego, la gráfica de la función no tiene puntos de corte con el eje x:



Ejemplo

Halla las soluciones de la ecuación $5x^2+13x=6$, con los siguientes pasos:

Paso 1: Se organiza la ecuación y se iguala a 0.

$$5x^2+13x-6=0$$

Paso 2: Se reemplazan los valores en la ecuación cuadrática, donde $a=5$, $b=13$ y $c=-6$.

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{(13)^2-4(5)(-6)}}{2(5)}$$

Paso 3: Se realizan las operaciones indicadas.

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{169+120}}{10}$$

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{289}}{10}$$

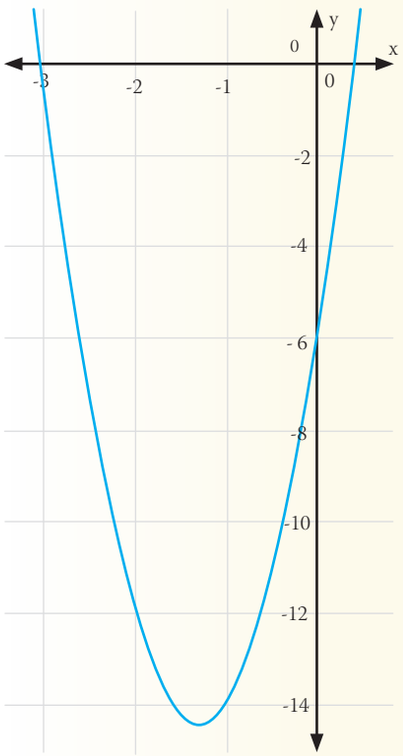
$$x=\frac{-13\pm17}{10}$$

Paso 4: Se halla la primera solución.

$$x_1=\frac{-13+17}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

Paso 5: Se halla la segunda solución.

$$x_2=\frac{-13-17}{10}=\frac{-30}{10}=-3$$



L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 84 04/09/2023 14:49:28

Componente: Numérico-variacional

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. En los siguientes ejercicios, resuelve cada ecuación por factorización:

a. $2x^2+5x-3=0$

b. $x^2+x-56=0$

c. $x^2-3x=108$

d. $15x^2-29x=14$

e. $3x^2=16x+35$

2. En los siguientes ejercicios, resuelve por el método de completar cuadrados.

a. $x^2-10x+9=0$

b. $x^2+6x+6=0$

c. $x^2+18x+32=0$

d. $4x^2-12x-27=0$

e. $9x^2-30x+7=0$

f. $4x^2=-28x+15$

g. $5x^2+18=-30x$

3. En los siguientes ejercicios, resuelve las ecuaciones usando la fórmula cuadrática.

a. $x^2-6x-3=0$

b. $x^2+10x-11=0$

c. $4x^2-4x-3=0$

d. $x^2+16x+88=0$

e. $9x^2+42x=0$

f. $25x^2-20x-24=0$

g. $4x^2+44x+21=0$

h. $\frac{5}{x^2}-\frac{10}{x}=-2$

Solución de problemas

4. Un bateador golpea verticalmente una pelota en un partido de béisbol con una velocidad inicial de 80 ft/s. La altura en pies de la pelota sobre el campo de juego, al cabo de t segundos, está dada por $s=-16t^2+80t$.

a. ¿En qué momento la pelota estará a 96 pies sobre el campo de juego?

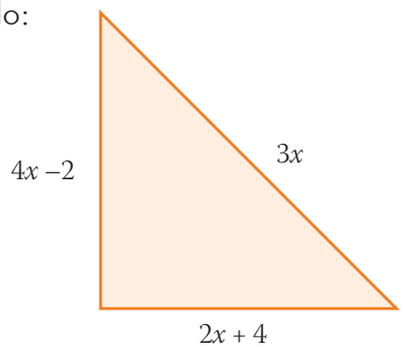
b. ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en caer al campo de juego?

5. Una piscina de 25 m de ancho por 40 m de largo es rodeada por un sendero de ancho uniforme. Si el área del sendero es de 426 m^2, ¿cuál debe ser su ancho?

6. La suma de dos números es 25 y la suma de sus cuadrados es 209, ¿cuáles son los números?

7. El ancho de un salón de forma rectangular es 3 metros mayor que el ancho, si aumentamos en 3 metros el ancho y en 2 metros el largo, el área se duplicará. ¿Cuál es el área original del salón?

8. Calcula el área y el perímetro del siguiente triángulo:



9. Encuentra un número entero tal que el cuadrado del antecesor de su triple sea el cuadrado del número aumentado en 21.

10. La diferencia entre dos números enteros positivos es 1 y la suma de los cuadrados es 61, halla los números.

Desempeño: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 85 04/09/2023 14:49:32

Ecuaciones reducibles a ecuaciones cuadráticas

Aprendo

Ecuaciones bicuadradas

Al resolver algunas situaciones en matemáticas, aparecen ecuaciones que aparentemente no son de segundo grado y no tienen la forma $ax^2+bx+c=0$, estas ecuaciones, en algunos casos, se presentan con radicales o ecuaciones de cuarto grado o bicuadradas. Para darles solución a dichas situaciones, es necesario utilizar procesos algebraicos que ayuden a simplificar la expresión y analizarla como una **ecuación cuadrática.**

Una **ecuación bicuadrada** es de la forma $ax^4+bx^2+c=0$ y, al ser de cuarto grado, poseen también como máximo cuatro raíces o soluciones.

Solución de ecuaciones bicuadradas

La ecuación bicuadrática $ax^4+bx^2+c=0$ se soluciona sustituyendo $u=x^2$. Así se transforma en la ecuación cuadrática $au^2+bu+c=0$. Una vez se encuentran las soluciones para u de esta ecuación, se regresa a la variable original x.

Ejemplo

Repasa los pasos que los estudiantes siguieron para hallar la respuesta.

Paso 1: Para solucionar la ecuación, sustituye $u=x^2$, entonces $u^2=x^4$, de allí obtienes

$$u^2-2{,}464u-90{,}000=0$$

Paso 2: Encuentra las dos raíces u_1 y u_2 factorizando la ecuación:

$$(u-2{,}500)(u+36)=0$$

$$(u-2{,}500)=0 \quad y \quad (u+36)=0$$

$$u_1=2{,}500 \quad y \quad u_2=-36$$

Paso 3: Dado que se busca el valor de x y no el de u, devuelve la sustitución inicial para obtener las raíces $x_{1,1}$; $x_{1,2}$; $x_{2,1}$; $x_{2,2}$

$$\sqrt{x_1^2}=\sqrt{2{,}500} \quad y \quad \sqrt{x_2^2}=\sqrt{-36}$$

$$x_1=\pm 50 \quad y \quad x_2=\pm\sqrt{-36}$$

$$x_{1,1}=50;\quad x_{1,2}=-50;\quad x_{2,1}=\sqrt{-36};\quad x_{2,2}=-\sqrt{-36}$$

Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 86 04/09/2023 14:49:35

Solución de ecuaciones con un radical

Una **ecuación con radicales** es aquella en la que la incógnita aparece en el radicando. Es el caso de: $\sqrt{3+x}=4$, $7+\sqrt{x}=9$, $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=7$, entre otras.

Ejemplo

Para la solución, sigue estos pasos:

$\left(\sqrt{7-2x}-\sqrt{5+x}\right)^2=\left(\sqrt{4+3x}\right)^2$	Eleva al cuadrado ambos lados de la igualdad.
$7-2x-2\left(\sqrt{7-2x}\right)\left(\sqrt{5+x}\right)+5+x=4+3x$	Desarrolla el cuadrado.
$8-4x=2\left(\sqrt{7-2x}\right)\left(\sqrt{5+x}\right)$ $(8-4x)^2=\left[2\left(\sqrt{7-2x}\right)\left(\sqrt{5+x}\right)\right]^2$	Deja las raíces solas a un lado. Eleva de nuevo al cuadrado ambos miembros de la igualdad.
$\frac{16x^2-64x+64}{4}=(7-2x)(5+x)$	Realiza las operaciones.
$4x^2-16x+16=35-3x-2x^2$	Simplifica términos.
$6x^2-13x-19=0$	Iguala a cero la ecuación resultante y resuelve.
$(6x-19)(x+1)=0$	Factoriza.
$(6x-19)=0 \quad y \quad (x+1)=0$	Aplica el teorema del factor cero.
$x=\frac{19}{6} \quad y \quad x=-1$	Encuentra las raíces de la ecuación.

Para corroborar los resultados puedes probar uno de los valores en la ecuación original:

$$\sqrt{7-2(-1)}-\sqrt{5+(-1)}=\sqrt{4+3(-1)}$$

$$\sqrt{9}-\sqrt{4}=\sqrt{1}$$

$$1=1$$

Cuando se realizan estos pasos, por lo general, se pierde una de las raíces. Es conveniente ilustrar el procedimiento para el segundo valor $\frac{19}{6}$ y comprobar que, efectivamente, no satisface la ecuación.

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

Resuelve las siguientes ecuaciones en los ejercicios del 1 al 16:

1. $2x^4 - 5x^2 = 12$

2. $x^4 + 196 = 53x^2$

3. $x^4 + 36 = 13x^2$

4. $\frac{x^4}{3} + 48 = \frac{25x^2}{2}$

5. $x^4 + 192 = 28x^2$

6. $\frac{10}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 5}{7}$

7. $x^4 = 15 + 8x^2$

8. $\frac{x^2 - 7}{27} = \frac{18}{x^2 + 2}$

9. $2x^4 - 5x^2 = 12$

10. $37x^2 = 4x^4 + 9$

11. $4x^4 + 16 = 20x^2$

12. $x^4 + 27 = \frac{147x^2}{4}$

13. $x^4 + 16x^2 = 225$

14. $\frac{9x^4}{4} = 37x^2 - 16$

15. $4\left(x^2 - 3\right) + 13 = x^2\left(3x^2 + 2\right)$

16. $46x^2 + 96 = x^4$

Plantea la ecuación y resuelve los ejercicios del 17 al 19.

17. El doble de la cuarta potencia de un número es 20 veces el cuadrado del número disminuido en 18.

18. Las tres cuartas partes de la cuarta potencia de un número son el cuadrado del número aumentado en 8.

19. El triple del cuadrado de un número aumentado en 250 equivale a la cuarta potencia del número disminuido en 300.

Solución de problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales en los ejercicios del 20 al 24:

20. $\sqrt{x + 14} = x - 6$

21. $\sqrt{19x - 12} - 4 = x$

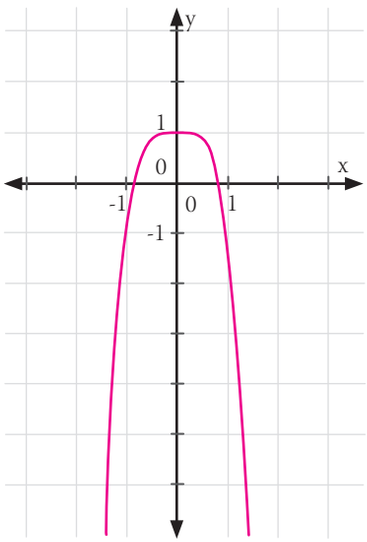
22. $\sqrt{x - 4} + 5 = x - 1$

23. $\sqrt{2x + 7} = x - 4$

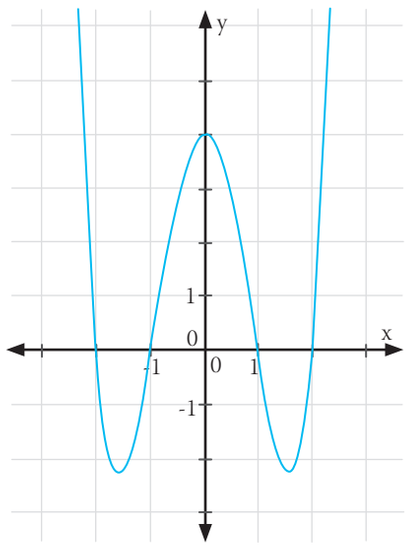
24. $\frac{x + 5}{2} = \sqrt{3x + 15}$

25. Verifica la gráfica de las siguientes funciones:

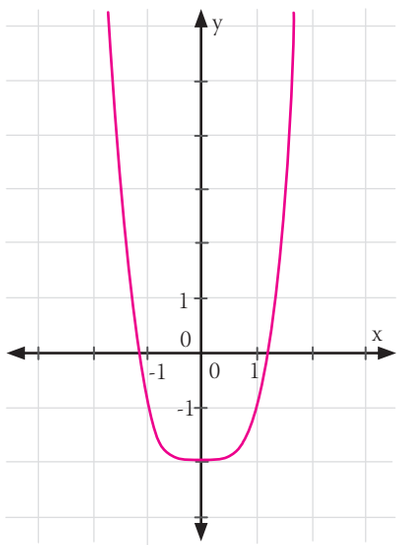
a. $f(x) = x^4 - 18x^2 - 175$



b. $f(x) = 4x^4 - 145x^2 + 36$



c. $f(x) = x^4 - 25x^2 + 144$



Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 88 04/09/2023 14:49:43

Desigualdades cuadráticas

Aprendo

Propiedades de las desigualdades

Para todo a, b, x, y, z que pertenecen a los números reales, se cumplen las siguientes condiciones relacionadas con el orden que se puede establecer entre ellos:

1. Tricotomía: $x < y,\ x > y \ \ o \ \ x = y$
2. Transitividad: Si $x < y \ \ y \ \ y < z$ entonces $x < z$
3. Propiedad aditiva: Si $x < y \ \ y \ \ a < b$ entonces $a + x < b + y$
4. Propiedad multiplicativa

   Si $x < y \ \ y \ \ a > 0$ entonces $ax < ay$

   Si $x < y \ \ y \ \ a < 0$ entonces $ax > ay$

Ejemplo 1: transitividad	**Ejemplo 2:** propiedad aditiva
$3 < 8; 8 < 12$ luego $3 < 12$	$4 < 8; -4 < 0$, entonces $4 + (-4) < 8 + 0$ $0 < 8$
Ejemplo 3: propiedad multiplicativa	**Ejemplo 4:** propiedad multiplicativa
$-5 < -1; 6 > 0$ $-5\ (6) < -1\ (6)$ $-30 < -6$	$4 < 8; -3 < 0$ $4\ (-3) > 8\ \ (-3)$ $-12 > -24$

Solución de una desigualdad cuadrática

Una desigualdad en la que se encuentra la variable elevada al cuadrado se llama **desigualdad cuadrática**. Para resolverla se siguen estos pasos:

1. Se mueven todos los términos de la desigualdad al lado izquierdo, de modo que se compare con 0 .
2. Se factoriza la expresión cuadrática del lado izquierdo.
3. Se igualan los factores a 0 para hallar los valores que determinan intervalos con diferentes signos.
4. Se evalúan valores de prueba de los intervalos en los factores para hallar el signo de estos factores en estos intervalos.
5. Se multiplican los signos en los intervalos y se seleccionan los intervalos que tengan el signo buscado.

Ejemplo

Para solucionar la desigualdad $\frac{3x^2-x-2}{2x^2-x-3}>0$ sigue los pasos:

Paso 1: Factoriza los términos de la desigualdad:

$$\frac{3x^2-x-2}{2x^2-x-3}=\frac{(x-1)(3x+2)}{(2x-3)(x+1)}$$

$$\frac{(x-1)(3x+2)}{(2x-3)(x+1)}>0$$

Paso 2: Busca los números para los cuales cada producto se convierte en cero:

$$x-1=0 \qquad x=1$$
$$3x+2=0 \qquad x=-\frac{2}{3}$$
$$2x-3=0 \qquad x=\frac{3}{2}$$
$$x+1=0 \qquad x=-1$$

Paso 3: Establece los intervalos en la recta numérica:

$$(-\infty,-1) \quad \left(-1,-\frac{2}{3}\right) \quad \left(-\frac{2}{3},1\right) \quad \left(1,\frac{3}{2}\right) \quad \left(\frac{3}{2},+\infty\right)$$

Paso 4: Evalúa el signo de cada expresión en los intervalos con los valores de prueba

Intervalos	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3},1\right)$	$\left(1,\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$
Valores de prueba	-2	$-\frac{5}{6}$	0	$\frac{5}{4}$	2
$x-1$	–	–	–	+	+
$3x+2$	–	–	+	+	+
$2x-3$	–	–	–	–	+
$x+1$	–	+	+	+	+
$\frac{(x-1)(3x+2)}{(2x-3)(x+1)}$	+	–	+	–	+

Paso 5: Con los resultados de la tabla, establece los intervalos solución de la situación planteada: $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{2}{3},1\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

Dado que la desigualdad tiene $\geq$ se analizan los valores de los extremos.

$$(-\infty,-1)\cup\left[-\frac{2}{3},1\right]\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$$

No se pueden incluir los números -1 y $\frac{3}{2}$ en los intervalos, ya que estos valores hacen que el denominador sea cero, por lo tanto son cifras críticas que no pertenecen a la solución de la inecuación.

Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 90 04/09/2023 14:49:47

Componente: Numérico-variacional

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

Resuelve las desigualdades y expresa la respuesta en intervalos en los ejercicios del 1 al 10.

1. $x^2 \geq 81$

2. $x^2 < 36$

3. $4x^2 \geq 25x$

4. $\dfrac{x-3}{x^2-4x-5} > 0$

5. $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

6. $x^2 - 11x > 60$

7. $3x^2 - 7x + 2 \geq 0$

8. $\dfrac{x^2+4x}{x^2-x-20} < 0$

9. $x^4 - 5x^2 - 36 > 0$

10. $\dfrac{x-1}{x^3+3x^2-25x-75} < 0$

11. Escribe un ejemplo para cada propiedad, mostrando un caso particular de la misma.

Otras propiedades de las desigualdades son:

Si $0 < a < b$ entonces $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

Si $0 < a < b$ entonces $0 < a^2 < b^2$

Si $0 < a < b$ entonces $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$

12. Completa las siguientes tablas teniendo en cuenta la desigualdad:

Desigualdad $\sqrt{3+x} > 4$	**Factorización**		
Términos	Intervalos		
	(,)	(,)	(,)
$\sqrt{3+x} > 4$			

Intervalo solución: _____

Desigualdad $\dfrac{x^2-2x+1}{x-5} > 0$	Factorización		
Términos	Intervalos		
	(,)	(,)	(,)
$\dfrac{x^2-2x+1}{x-5} > 0$			

Intervalo solución: _____

Solución de problemas

13. Un objeto es lanzado hacia arriba desde lo alto de un acantilado con una velocidad inicial de 192 ft/s. La altura en pies sobre el suelo después de t segundos está dada por la ecuación:

$$h(t) = -16t^2 + 192t + 153$$

¿Para qué valores de t el objeto está a más de 665 pies?

14. Un jugador de fútbol patea un balón de forma vertical con una velocidad inicial de 20 m/s. La altura sobre el suelo después de t segundos se halla mediante la función:

$$f(t) = -5t^2 + 20t$$

a. ¿Cuánto tiempo tarda el balón por encima de los 15 metros?

b. ¿Cuál es la altura máxima?

15. El gerente de una compañía estima que el precio de venta de un producto viene dado por la función $p(x) = 350 - \dfrac{1}{4}x$. Si la función de ingreso por vender x unidades del producto es $R(x) = xp(x)$, determina:

a. ¿Para qué valores de x el ingreso es por lo menos 100,000?

b. El ingreso máximo.

Desempeño: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 91 04/09/2023 14:49:51

Aplicaciones de la función cuadrática

Aprendo

Perímetro y área

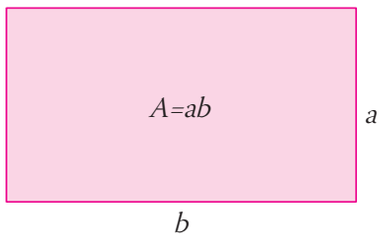
La relación entre el área y el perímetro es una de las **aplicaciones de la función cuadrática**. Veamos como se construye la ecuación:

1. Determinar el perímetro $P=2(a+b)$
2. Despejar uno de los lados:

$$\frac{P}{2}=a+b$$
$$\frac{P}{2}-a=b$$

3. Determinar el área: $A=ab$
4. Sustituir el lado despejado en el área:

$$A=\left(\frac{P}{2}-a\right)a$$
$$A=\frac{Pa}{2}-a^2$$



Ejemplo

Juan y su grupo disponen las 4 estacas en forma de rectángulo sobre el campo, tratando de obtener la mayor área posible usando los 40 metros de cuerda. Juan recuerda que el perímetro de un rectángulo es: $P=2a+2b$ o $P=2(a+b)$

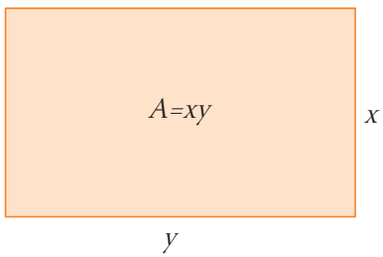
Y que el área es $A=ba$

¿Con qué dimensiones se obtendrá el área máxima?

El área de exposición de Juan y su grupo es $A=xy$ y el perímetro $P=2(x+y)$

Como disponen de 40 metros de cuerda, se tiene que:

$40=2(x+y)$	Igualando el valor del perímetro
$20=x+y$	Dividiendo entre 2
$20-x=y$	Despejando y



Dado que el área es $A=xy$, se sustituye y en A

$A=xy$	
$A=(20-x)x$	Sustituyendo.
$A=20x-x^2$	Aplicando propiedad distributiva.
$A=-x^2+20x$	Organizando los términos.

Se halla el eje de simetría para encontrar el punto máximo: $\frac{-b}{2a}=\frac{-20}{2(-1)}=10$

$y=20-x$

$y=20-10=10$

Con un cuadrado de 10 metros por 10 metros se obtendrá el área máxima: $A_{max}=10m\times 10m=100m^2$

Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

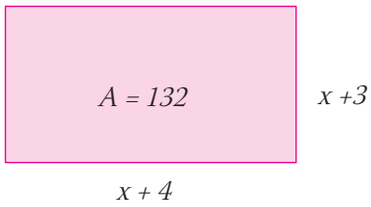
L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 92 04/09/2023 14:49:54

Componente: Numérico-variacional

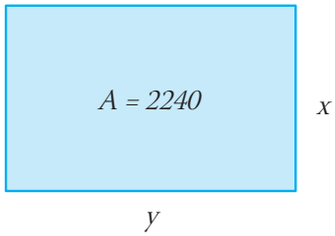
Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Halla el valor de x para que el área sea el valor indicado.

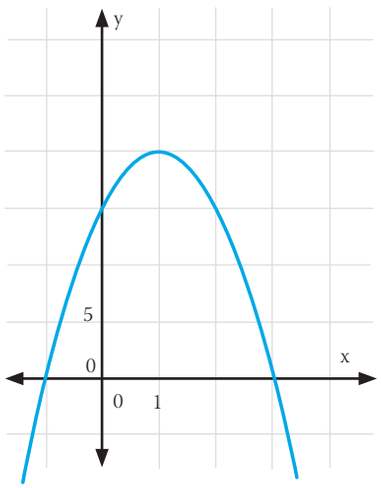


2. El perímetro del rectángulo es 192 y su área 2 240. Halla las dimensiones del rectángulo.



Solución de problemas

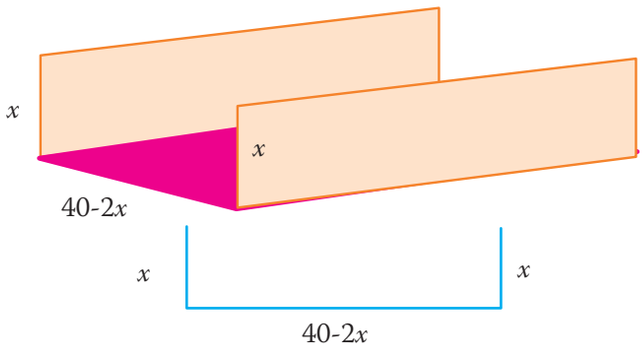
3. Un clavadista salta de un trampolín a 15 metros de altura y salta con una velocidad inicial de 10 m/s. La función que modela la altura sobre el agua es $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$.



4. A pesar de que el césped sintético del campo de un estadio es aparentemente plano, su superficie tiene la forma de una parábola. Esto es para que la lluvia resbale hacia los lados. Si tomamos la sección transversal del campo, la superficie puede ser modelada por $y = -0.000234\,(x - 80)2 + 1.5$, donde x es la distancia desde la izquierda del campo y y es la altura del campo. ¿Cuál es el ancho del campo?

5. Un lanzamiento de jabalina puede ser modelado usando la ecuación $y = 3x^2 + 5x - 1$ donde x es la distancia recorrida (en pies) y y es la altura (también en pies). ¿Qué tan largo es el tiro?

6. Una empresa fabrica canales de desagüe, para lo cual dispone de hojas metálicas largas de 40 cm de ancho, a las que se les hace un doblez perpendicular a cada lado.

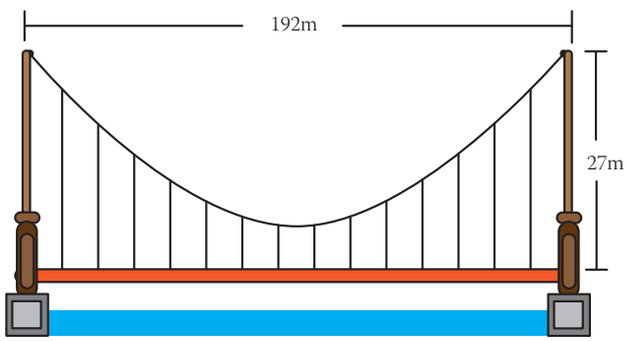


- ¿Qué valor de x dará al canal su mayor capacidad?

7. Un puente sobre un río se sostiene sobre dos columnas separadas por 192 metros y con 27 metros de altura. Un cable tendido entre las dos columnas forma una parábola y su punto más bajo está a 3 m sobre la calzada.

a. Encuentra la ecuación de la parábola. Sugerencia: Usa la ecuación estándar.

b. ¿Cuánto mide uno de los cables que se encuentra a 48 m del centro?



Desempeño: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 93 04/09/2023 14:49:55

Progresiones aritméticas

Aprendo

Una **progresión aritmética** es una sucesión de términos $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...\}$ donde se cumple que la diferencia entre un término y el anterior es una constante d, o sea, si cumple que:

$$a_n - a_{n-1} = d \text{ para cualquier } n \geq 2$$

La constante d es la **diferencia de la progresión**, a_1 es el primer término y a_n es el último término si la progresión es finita.

Término general de una progresión aritmética

Establezcamos una progresión aritmética general con los términos a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, donde $a_n - a_{n-1} = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = d$, es decir, la diferencia de la progresión. Por lo tanto, de acuerdo a la definición de progresión aritmética, tenemos:

$a_1 = a_1$	*Primer término*
$a_2 = a_1 + d$	*Segundo término*
$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$	*Tercer término*
$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$	*Cuarto término*
⋮	⋮
$a_n = a_{n-1} + d = [a_1 + (n-2)d] + d = a_1 + (n-2+1)d = a_1 + (n-1)d$	*Término general.*

Así hemos obtenido el término n-ésimo o término general de la sucesión aritmética. Siendo más explícitos, el término general corresponde a una expresión que permite determinar el último término de una progresión aritmética finita, esto es:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d$$

Ejemplo

El primer y el noveno término de una sucesión aritmética son 4 y 16 respectivamente, ¿cuál es el valor de la diferencia?

De la expresión general despejamos d, reemplazamos los valores dados y calculamos, esto es:

$$d = \frac{a_9 - a_1}{n-1}. \text{ Entonces } d = \frac{16-4}{9-1} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}, \quad d = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, la progresión en forma extendida será:

$$4, \frac{11}{2}, 7, \frac{17}{2}, 10, \frac{23}{2}, 13, \frac{29}{2}, 16, \frac{32}{2}, ...$$

Suma de los términos de una progresión aritmética

La suma de los términos de una progresión aritmética se calcula mediante la fórmula

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 94 04/09/2023 14:49:56

Componente: Numérico-variacional

Ejemplo

Calcula la suma de los términos de la progresión: $\{2,8,14,20,26,32,38,44\}$

$a_1 = 2$

$a_n = 44$

$n=8$

Aplica la fórmula: $\frac{8(2+44)}{2} = 184$

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Comprueba si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y si la respuesta es afirmativa. Encuentra su diferencia:

a. $\{3,1,-1,-3,-5,-7\}$

b. $\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\frac{9}{2},5,\frac{11}{2}\right\}$

c. $\{1,4,7,9,11,14,17,21\}$

d. $\{2.134,2.190,2.246,2.302\}$

e. $\left\{\sqrt{2},2\sqrt{2},3\sqrt{2},4\sqrt{2},5\sqrt{2},6\sqrt{2}\right\}$

f. $\left\{3\frac{1}{2},5\frac{1}{4},7\frac{1}{6},9\frac{1}{8}\right\}$

g. $\{-15,-9,-3,3,9,15\}$

h. $\left\{\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4},\frac{11}{4}\right\}$

i. $\{7,1,-5,-11,-17,-23,-29\}$

j. $\{-1,3,-5,7,-9,11,-13,15\}$

Solución de problemas

2. Determina los 10 términos de las siguientes progresiones aritméticas dada su fórmula:

Fórmula	Términos
$a_n = 7+(n-1)3$	
$a_n = 2+(n-1)$	
$a_n = \frac{1}{2}+(n-1)4$	
$a_n = 7+(n-1)\frac{1}{5}$	

3. Determina la fórmula general de las siguientes progresiones aritméticas dados sus términos:

Términos	Fórmula
$\{2,7,12,17,22,27,32,37,42,47,52\}$	
$\{-21,-13,-5\}$	
$\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\frac{5}{3},2\right\}$	
$\left\{4,\frac{17}{4},\frac{9}{2},\frac{19}{4},5,\frac{21}{4},\frac{11}{2}\right\}$	

Desempeño: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 95 04/09/2023 14:50:00

Progresiones geométricas

Aprendo

Una **progresión geométrica** es una secuencia en la que un elemento se obtiene multiplicando el elemento inmediatamente anterior por una constante denominada **razón** o **factor de la progresión**.

Para encontrar la razón basta con dividir un número con el antecesor, así:

$$r = \frac{a_k}{a_{k-1}}$$

Término general de una progresión geométrica

Para obtener el término general de la progresión geométrica hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 \cdot r \\
a_3 &= a_2 \cdot r = \left(a_1 \cdot r\right) \cdot r = a_1 r^2 \\
a_4 &= a_3 \cdot r = \left(a_1 \cdot r^2\right) \cdot r = a_1 r^3 \\
a_5 &= a_4 \cdot r = \left(a_1 \cdot r^3\right) \cdot r = a_1 r^4 \\
a_{n-1} &= a_{n-2} \cdot r = \left(a_1 \cdot r^{n-3}\right) \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \\
a_n &= a_{n-1} \cdot r = \left(a_1 \cdot r^{n-2}\right) \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}
\end{aligned}$$

En conclusión, el término que representa cualquiera de los términos de una progresión geométrica en función de n está dada por:

$$a_n = a_1 \bullet r^{n-1}$$

Ejemplo

Calcula la razón de una progresión geométrica en la que el undécimo término es 5,120 y el primero es 5. Escribe la progresión hasta el término número 15.

Reemplazando en $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
a_{11} = a_1 \cdot r^{11-1} &\Rightarrow 5{,}120 = 5 \cdot r^{10} \\
r^{10} = \frac{5{,}120}{5} &\Rightarrow r = \sqrt[10]{1{,}024} \\
&\Rightarrow r = 2
\end{aligned}$$

La progresión geométrica entonces es:

5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2,560, 5120, 10240, 20480, 40960, 41920,...

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 96 04/09/2023 14:50:02

Componente: Numérico-variacional

Suma de los términos de una progresión geométrica

La suma de los términos de una progresión aritmética se calcula mediante la fórmula

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

Ejemplo

Calcula la suma de los 10 términos de la progresión geométrica finita:

$$\{2,8,32,...\}$$

$$a_1 = 2,\ r = \frac{8}{2} = 4 \text{ y } n = 10$$

$$S_n = \frac{2(1-4^{10})}{1-4} = \frac{2(1-4^{10})}{-3} = \frac{2(1-1{,}048{,}576)}{-3} = \frac{-2{,}097{,}150}{-3} = 699{,}050$$

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Comprueba si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, si la respuesta es afirmativa, encuentra r:

a. $\left\{3,1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27}\right\}$

b. $\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\frac{9}{2},5,\frac{11}{2}\right\}$

c. $\{4,20,100,500,2\,500\,12\,500\}$

d. $\{-2,14,-98,686,-4\,802,33\,614\}$

e. $\left\{\sqrt{2},2,2\sqrt{2},4,4\sqrt{2},8\right\}$

f. $\left\{3\frac{1}{2},5\frac{1}{4},7\frac{1}{6},9\frac{1}{8}\right\}$

g. $\{-5,-10,-20,-40,-80,-160\}$

h. $\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4,8,16,32,64\right\}$

Solución de problemas

2. Determina los 10 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas dada su fórmula.

Fórmula	Términos
$a_n = 7\times 3^{(n-1)}$	
$a_n = 2\times 3^{(n-1)}$	
$a_n = \frac{1}{2}\times 4^{(n-1)}$	

3. Determina la fórmula general para hallar cualquier término de las progresiones aritméticas dados sus términos.

Términos	Fórmula
$\{1,4,16,64,256\}$	
$\{-2,-4,-8,-16,-32,-64,-128,-256,-512\}$	
$\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right\}$	

Desempeño: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 97 04/09/2023 14:50:05

Función exponencial

Aprendo

Si a es un número real positivo, entonces la función $f:R\to R$ definida mediante la expresión $f(x)=ka^x$, donde k es un número real, se llama **función exponencial de base a**.

Ejemplo

El crecimiento de la población está descrito por la función exponencial

$$f(x)=4^x$$

Año	Función	Población
1	$f(1)=4^1$	4
2	$f(2)=4^2$	16
3	$f(3)=4^3$	64
4	$f(4)=4^4$	256

Gráficas de las funciones exponenciales

Para graficar una función exponencial se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

- Es de la forma $f:R\to R^+$.
- Su dominio es el conjunto de los números reales.
- Su rango es el conjunto de los reales positivos.
- Su gráfica siempre estará por encima del eje x.
- Todas las funciones exponenciales pasan por el punto (0,1).

Ejemplo

La tabla muestra el crecimiento de la población de tres barrios diferentes:

Año	Población		
	Ciudad Vieja	Cerrito del Carmen	El Gallito
	$f(x)=4^x$	$f(x)=2^x$	$f(x)=3^x$
1	4	2	3
2	16	4	9
3	64	8	27
4	256	16	81
5	1,024	32	243
6	4,096	64	729
7	16,384	128	2,187

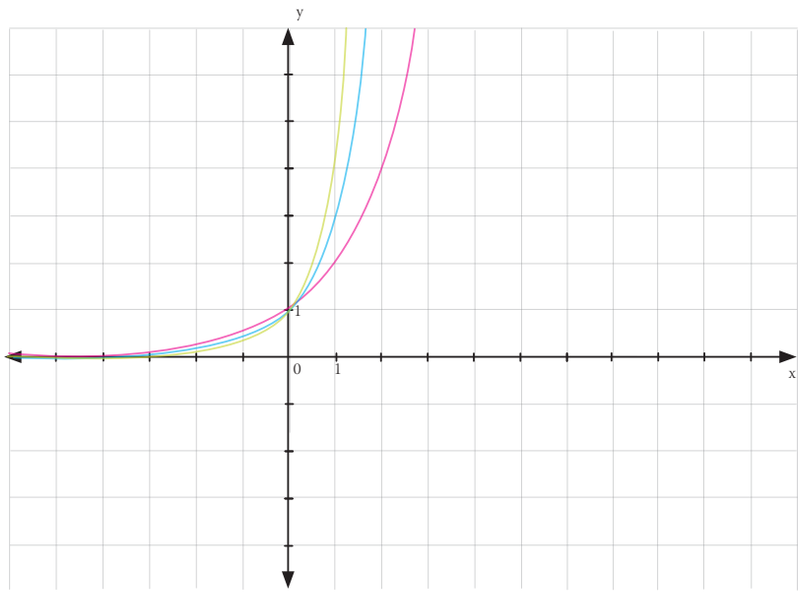
Gráficamente tenemos:

Color	Fórmula	Barrio
	$f(x)=4^x$	Ciudad Vieja

	$f(x)=2^x$	Cerrito del Carmen
	$f(x)=3^x$	El Gallito

Utiliza expresiones numéricas, algebraicas o gráficas para hacer descripciones de situaciones concretas y tomar decisiones con base en su interpretación.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 98 04/09/2023 14:39:36



Al analizar los datos en las gráficas, se puede ver que el barrio que ha crecido con mayor rapidez en cuanto a la población es Ciudad Vieja, mientras que El Carrito del Carmen ha tenido un crecimiento más lento.

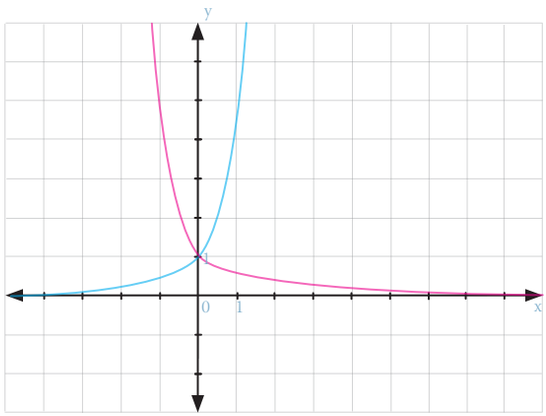
Ejemplo

Grafica las funciones $y=5^x$ y $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

Paso 1
Tabula las funciones

x	$y=5^x$	$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$
-4	0.0016	625
-3	0.008	125
-2	0.04	25
-1	0.2	5
0	1	1
1	5	0.2
2	25	0.04
3	125	0.008
4	625	0.0016

Paso 2
Grafica las funciones



Gráfica 3

Paso 3
Analiza las funciones

Función	Color	Dominio	Rango	Crecimiento
$y=5^x$		$x \mid x \in R$	$y \mid y \in R^+$	Creciente
$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$		$x \mid x \in R$	$y \mid y \in R^+$	Decreciente

Desempeño: PIdentifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 99 04/09/2023 14:39:37

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Calcula el valor de la función exponencial para los valores indicados de x.

Función	x = -1	x = 0	x = 5	x = 10
$y=2^x$				
$y=3^x$				
$y=10^x$				
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$				
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$				
$y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$				
$y=e^{-x}$ $y=e^{-x}$				

2. Halla el valor de x para las siguientes ecuaciones:

a. $10^x=100$

b. $3^x=6{,}561$

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$

d. $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{27}$

e. $2^{x+1}=16$

3. Completa las tablas de valores para:

$\{x \mid x\in Z \mid -3\le x\le 3\}$

a. $\{x \mid x\in Z \mid -3\le x\le 3\}$ $y=\left(\frac{4}{7}\right)^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

b. $y=e^{2x}$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

c. $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

d. $y=\left(2\frac{1}{3}\right)^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

Solución de problemas

4. Las amebas son seres unicelulares que se reproducen dividiéndose en dos. En algunos cultivos, particularmente, se duplican cada hora. Supongamos que, inicialmente, se tiene una sola ameba.

a. Escribe una fórmula matemática que represente la información suministrada.

b. Completa la tabla de valores de acuerdo con la fórmula hallada.

TIEMPO (horas)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N.º de amebas									

Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 100 04/09/2023 14:39:42

Función logarítmica

Aprendo

La **función logarítmica** $\log_a x$ es la inversa de la función exponencial de base a, el dominio de una función logarítmica es el conjunto de los números reales positivos y su rango, el conjunto de todos los números reales.

Ejemplo

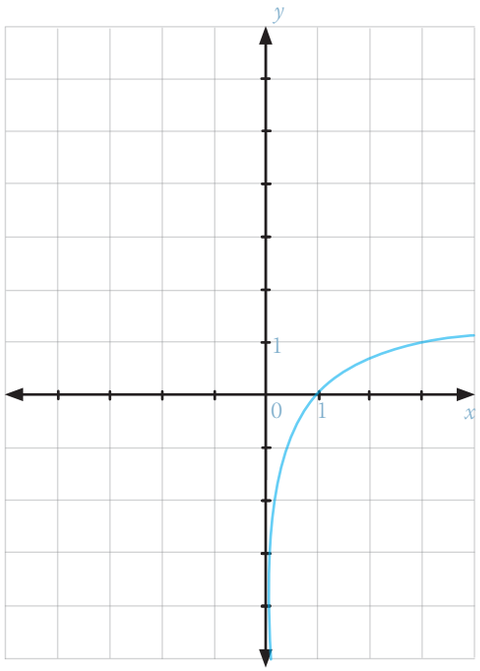
Traza la gráfica de la función $y = \log_3 x$

Paso 1: Convierte la función logarítmica en exponencial $x = 3^y$.

y	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

Paso 2: Tabula la función exponencial, teniendo cuidado de intercambiar el orden de las variables.

Paso 3: Procede a graficar.



Función exponencial natural y logaritmo natural

El número e se define como el valor al que tiende

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

cuando n se hace muy grande, una aproximación es e = 2,71828..., su importancia radica en las innumerables aplicaciones reales que posee esta función donde el número e es la mejor base posible.

Ejemplo

Analicemos la función $D(h) = 5e^{-0.4h}$

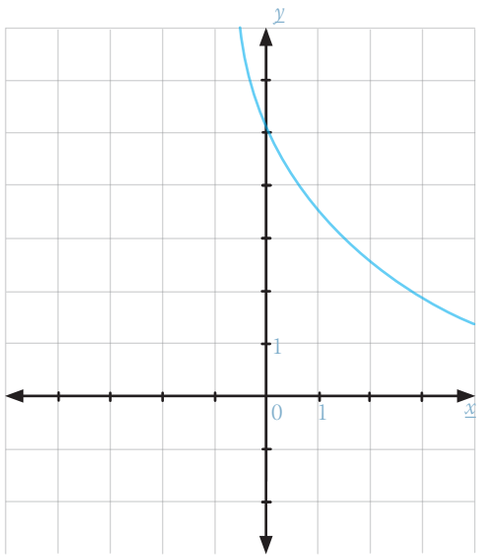
Paso 1. Tabula la función.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	0.6703	0.4493	0.3012	0.2019	0.1353	0.0907	0.0608	0.0408

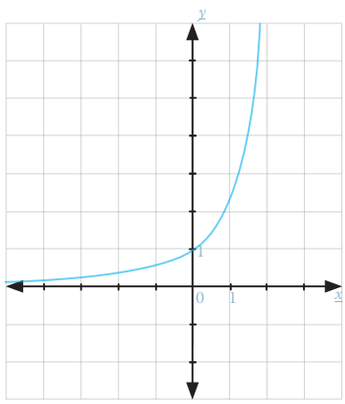
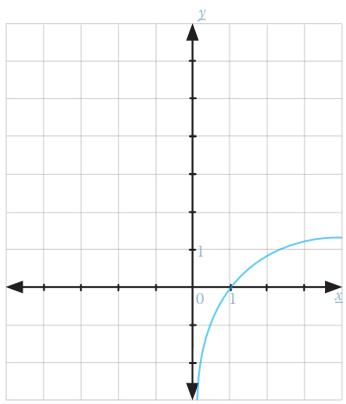
Desempeño: Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 101 04/09/2023 14:39:43

Paso 2. Grafica.



Las funciones exponencial natural y logaritmo natural tienen las siguientes características:

Función	Exponencial natural	Logaritmo natural
Fórmula	$y = e^x$	$y = \ln x$
Dominio	Reales	$(0,\infty)$
Rango	$(0,\infty)$	Reales
Asíntota	Horizontal $y = 0$	Vertical $x = 0$
Gráfica	Gráfica 11 	Gráfica 12 

Utiliza expresiones numéricas, algebraicas o gráficas para hacer descripciones de situaciones concretas y tomar decisiones con base en su interpretación.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 102 04/09/2023 14:39:44

Componente: Numérico-variacional

Aplico mis conocimientos

Comunicación, razonamiento y solución de problemas

1. En tu cuaderno, construye las graficas de las siguientes funciones:

a. $y = 3\ln x$

b. $y = \frac{1}{3}\ln x$

c. $y = -2\ln x$

d. $y = -\frac{3}{4}\ln x$

e. $y = e^{3x}$

f. $y = e^{\frac{1}{3}x}$

g. $y = e^{-2x}$

h. $y = e^{-\frac{3}{4}x}$

i. $y = 3\log_2 x$

j. $y = \frac{1}{2}\log_3 x$

k. $y = -2\log_5 x$

l. $y = -\frac{1}{4}\log_2 x$

2. Determina el dominio y el rango de las funciones del numeral anterior:

Función	Dominio	Rango	Crecimiento
$y = 3\ln x$			
$y = \frac{1}{3}\ln x$			
$y = -2\ln x$			
$y = -\frac{3}{4}\ln x$			

Función	Dominio	Rango	Crecimiento
$y = e^{3x}$			
$y = e^{\frac{1}{3}x}$			
$y = e^{-2x}$			
$y = e^{-\frac{3}{4}x}$			

Función	Dominio	Rango	Crecimiento
$y = 3\log_2 x$			
$y = \frac{1}{2}\log_3 x$			
$y = -2\log_5 x$			
$y = -\frac{1}{4}\log_2 x$			

Desempeño: Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 103 04/09/2023 14:39:47

Función raíz

Aprendo

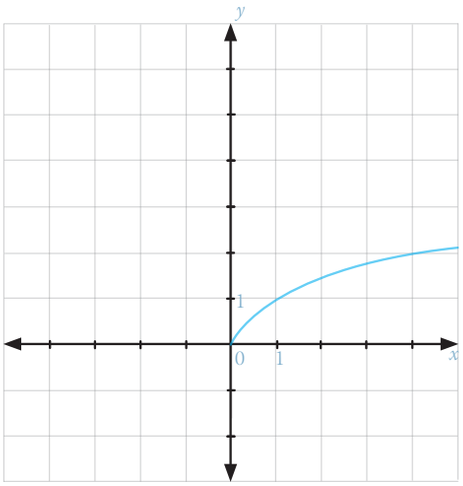
La **función raíz** cuadrada la escribimos: $f(x)=\sqrt{x}$

El dominio son todos los números reales positivos $(0, \infty)$, lo cual significa que x no puede ser negativo. Si el valor de x fuese negativo, no sería una función.

La gráfica de la función raíz cuadrada corresponde a la mitad de una parábola como las que conocemos de la función cuadrática, pero en este caso el eje de simetría de la media parábola es horizontal (paralelo al eje de las abscisas).

Ejemplos

1. Construye la gráfica de la función $y=\sqrt{x-1}$



Paso 1. Calcula el dominio.

La función está definida para los valores que cumplen la desigualdad,

$$x-1\geq 0$$

es decir $x\geq 1$

Por tanto, la gráfica la debes construir en el intervalo $x\in(1,+\infty)$.

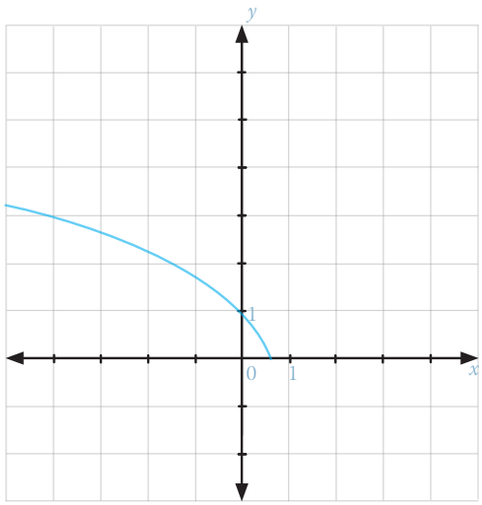
2. Construye la gráfica de la función $y=\sqrt{1-2x}$

Paso 1. Calcula el dominio.

La función está definida para los valores que cumplen la desigualdad,

$$1-2x\geq 0$$

es decir: $\frac{1}{2}\geq x$



Por tanto, la gráfica la debes construir en el intervalo $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

Paso 2. Construye la tabla de valores.

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$
y	$\sqrt{17}$	$\sqrt{15}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{11}$	3	$\sqrt{7}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	1	0

Paso 3. Elabora la gráfica.

El rango de la función está dado por el intervalo $y\in(0,+\infty)$, ya que todos los valores de y están por encima del eje x.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 104 04/09/2023 14:39:50

Componente: Numérico-variacional

Aplico mis conocimientos

Comunicación, razonamiento y solución de problemas

1. En tu cuaderno, construye las graficas de las siguientes funciones:

a. $y = 3\sqrt{x}$

b. $y = \frac{1}{5}\sqrt{x}$

c. $y = -2\sqrt{x}$

d. $y = -\frac{3}{4}\sqrt{x}$

e. $y = \sqrt{x+5}$

f. $y = \sqrt{x-2}$

g. $y = \sqrt{2x+3}$

h. $y = \sqrt{3x-6}$

i. $y = \sqrt{\frac{x+5}{2}}$

j. $y = \sqrt{\frac{1}{2}(2x+3)}$

k. $y = \sqrt{-3(x+2)}$

2. Determina el dominio y el rango de las funciones del numeral anterior.

Función	Dominio	Rango	Crecimiento
$y = 3\sqrt{x}$			
$y = \frac{1}{5}\sqrt{x}$			
$y = -2\sqrt{x}$			
$y = -\frac{3}{4}\sqrt{x}$			

Función	Dominio	Rango	Crecimiento
$y = \sqrt{x+5}$			
$y = \sqrt{x-2}$			
$y = \sqrt{2x+3}$			
$y = \sqrt{3x-6}$			

Función	Dominio	Rango	Crecimiento
$y = \sqrt{\frac{x+5}{2}}$			
$y = \sqrt{\frac{1}{2}(2x+3)}$			
$y = \sqrt{-3(x+2)}$			

Desempeño: Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 105 04/09/2023 14:39:53

Usos y aplicaciones de las funciones trascendentes

Aprendo

La **ley del enfriamiento de los cuerpos de Newton** establece que el enfriamiento de un cuerpo es proporcional, en cada instante, a la diferencia con la temperatura ambiente.

La ley dice que si T_o es la temperatura inicial con que introducimos un cuerpo en un ambiente con una temperatura de T_a grados, al cabo de un tiempo t la temperatura del cuerpo es:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)\, e^{-\alpha t}$$

Donde α es una constante, llamada **la constante de enfriamiento**, y es particular de cada cuerpo.

Ejemplo

Mientras estaba cocinando, doña María encontró dentro de la olla un termómetro que se le había extraviado. Ella se preguntó de qué forma varía la temperatura del termómetro si se encuentra dentro de un líquido que está a 60° y la temperatura de la cocina es de 20°.

La temperatura ambiente de la cocina es de 20^o si sacas de la cazuela un termómetro que está a 60^o, luego de 15 minutos, el termómetro baja su temperatura hasta los 25^o C.

Halla la constante de enfriamiento del termómetro.

$$25 = 20 + (60 - 20)e^{-\alpha\, 0.25}$$
$$25 = 20 + (40)e^{-\alpha\, 0.25}$$
$$25 - 20 = 40e^{-\alpha\, 0.25}$$
$$\frac{5}{40} = e^{-\alpha\, 0.25}$$
$$0.125 = e^{-\alpha\, 0.25}$$
$$-0.25\,\alpha = \ln 0.125$$
$$\alpha = 8.318$$

Crecimiento de poblaciones

El economista británico Thomas Malthus propuso en 1798 que la velocidad de crecimiento de una población de individuos es proporcional a la población ya existente.

Si P_o es la población inicial (es decir, la existente cuando comenzamos a contar), existe una constante de crecimiento k en cada población, de manera que el número de individuos al cabo de un tiempo t, viene expresado por una ley del tipo $P(t) = P_0\, e^{kt}$.

Ejemplo

Una población de insectos crece de acuerdo con la función $y = 1 + 2e^x$, donde x es el tiempo en meses y y es el número de insectos en miles.

a. ¿Cuántos insectos hay inicialmente?

b. ¿Cuántos insectos hay al cabo del primer mes?

Inicialmente, cuando $x = 0$, existían $y(0) = 1 + 2\, e^0 = 3{,}000$ insectos.
Al cabo del primer mes hay $y(1) = 1 + 2\, e^1 = 6{,}436$ insectos.

Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 106 04/09/2023 14:39:55

Componente: Numérico-variacional

Aplico mis conocimientos

Solución de problemas

1. Un policía tomó nota de que la temperatura ambiente era de $20^{o}\,C$ y la de un cadáver, de $29.5^{o}C$. Dos horas más tarde, se volvió a tomar la temperatura del cadáver, que había descendido hasta los $23.4^{o}C$. Según los datos anteriormente dados, averigua:



a. La constante de enfriamiento del fallecido.

b. La hora de su fallecimiento.

2. La cantidad de bacterias en un cultivo fue de 400 después de 2 horas y de 25,600 después de 6 horas (Se supone crecimiento exponencial). Calcula:

a. ¿Cuál era el tamaño de la población inicial?

b. Encuentra una expresión para la población después de t horas.

3. El costo del transporte urbano era, en 1982, de 15 centavos. La función exponencial que describe el crecimiento del costo del transporte urbano:

$$C(t) = 0.12\, e^{0.035\, t}$$

a. Aplicando esta fórmula ¿cuál es ahora el costo del transporte urbano?

b. ¿Cuál será el costo en el año 2024?

4. El número de balones producidos anualmente crece exponencialmente. El número N, en millones, producidos es $N(t)=2.e^{0.1\,t}$, donde t es el tiempo en años y t = 0 corresponde al año 2000. ¿Cuánto tiempo debe pasar para que en un año se puedan vender 600,000 balones?



5. Una población tiene un modelo de crecimiento que está dado por $P(t)=4e^{0.02t}$ millones a partir del año 2000. ¿En cuánto tiempo la población tendrá 5 millones de habitantes?

6. La población de un país $P\,(t)$ en millones de habitantes, t años después de 1990, está modelada por $P(t)=P_{o}e^{0.02t}$. ¿Cuándo se duplicará la población?

7. La población de un país $P(t)$ en millones de habitantes, t años después de 1999, está modelada por $y=3\ln x$. ¿En cuánto tiempo la población llegará a los 42 millones de habitantes? Recuerda que el modelo permanece en el tiempo.



8. Un economista predice que el poder de compra, $P(t)$, de una unidad monetaria a los t años, a partir de hoy, será de $P(t)=(0.95t)$. ¿Cuándo ese poder de compra será la mitad de lo que es hoy?

9. Una cantidad de 150 UM es invertida a un interés compuesto anual del 5 %. ¿Cuánto tiempo tardará la inversión en valer 200 UM?

Desempeño: Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 107 04/09/2023 14:39:58

Polígonos

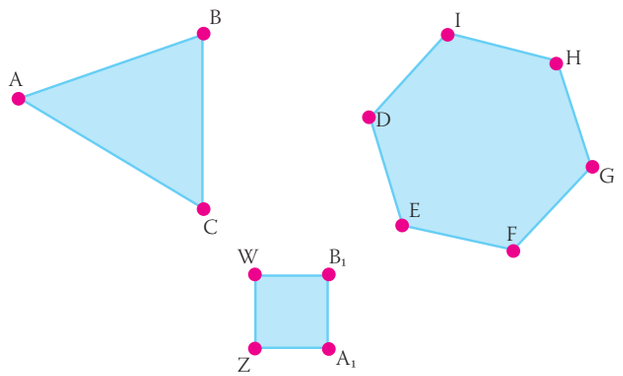
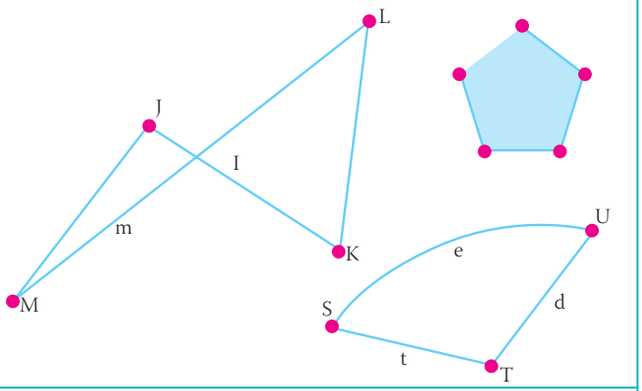
Aprendo

Polígonos y su clasificación

La palabra **polígono** se remite desde la Antigüedad a las palabras griegas gono que significan "ángulo" y *poli* "muchos". Es una figura representable en un plano, la cual se compone por segmentos rectos consecutivos que la delimitan, cumpliendo con las siguientes propiedades:

1. Tiene un conjunto de puntos finitos $\{A, B, C, ..., N\}$ llamados **vértices del polígono**, que unen segmentos de recta (lados) encerrando una región determinada.
2. Un vértice une 2 segmentos de recta.
3. Los lados que se intersectan en un vértice se denominan **lados consecutivos**.
4. Los segmentos de recta y todos sus vértices encierran una región del plano.

La pregunta clave hasta este punto es: ¿todas las figuras que tengan muchos ángulos se consideran polígonos? Observa las siguientes figuras y plantea características que tiene cada grupo y deduce.

Grupo 1	Grupo 2
	
Características:	

A partir de las observaciones que realizaste en el ejercicio anterior, detallaremos que los polígonos cumplen características que se deben tener en cuenta para su identificación y su representación en el plano.

Recuerda que...

Un segmento es la unión de 2 puntos a partir de una línea recta.

Características de los polígonos

Un polígono está formado por un número finito de segmentos, los cuales conforman una figura cerrada. Además de cumplir con los siguientes requisitos específicos:

- Los lados que tiene un punto en común no forman un ángulo llano.
- Cada segmento del polígono interseca exactamente a otros dos únicamente en sus extremos.
- Al tomar 2 lados cualesquiera no consecutivos en los segmentos del polígono, estos no se intersecan.

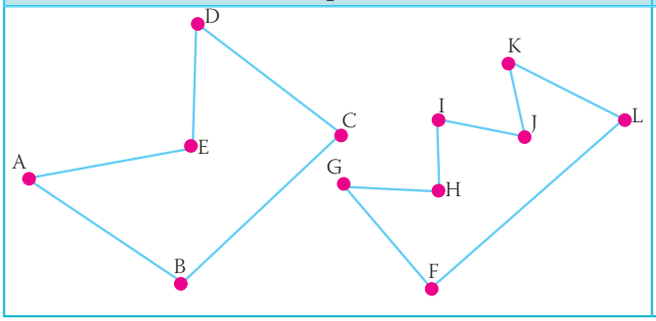
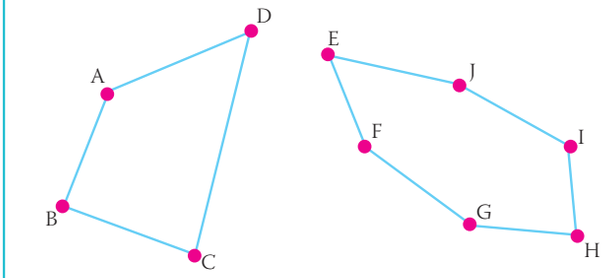
De las figuras planteadas en el grupo 1 y 2, argumenta cuáles de ellas cumplen, con las características de un polígono.
¿Cómo convertirías a polígonos las figuras que no cumplen con las características?

Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 108 04/09/2023 14:39:58

Componente: Métrico-geométrico

Clasificación de polígonos

Grupo 3	Grupo 4
	

El grupo 3 y el grupo 4 pertenecen a polígonos, debido a que cumplen con las características presentadas en su conceptualización.
En el grupo 3 se clasifican los **polígonos cóncavos**, que son los que tienen algún segmento del polígono en el interior de él.
En el grupo 4 se clasifican los **polígonos convexos**, que son aquellos que no contienen en su interior ningún segmento de los lados que lo conforman.

Clasificación de los polígonos por sus lados

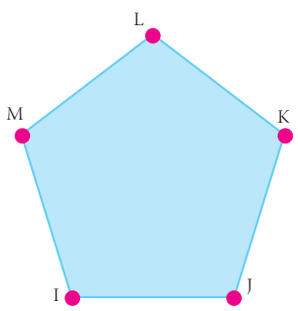
Los polígonos se clasifican por el número de lados que los conforman. Sin embargo, es importante nombrar, adecuadamente, los vértices del polígono para su posterior análisis geométrico. A cada vértice le corresponde una letra en orden consecutivo del abecedario.
El polígono regular es convexo y todos los lados que lo conforman son congruentes al igual que todos sus ángulos.

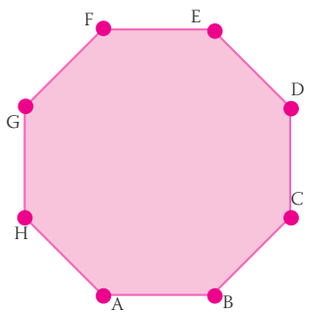
Teniendo en cuenta la cantidad de lados, los polígonos se pueden nombrar y clasificar como se muestra en la siguiente tabla:

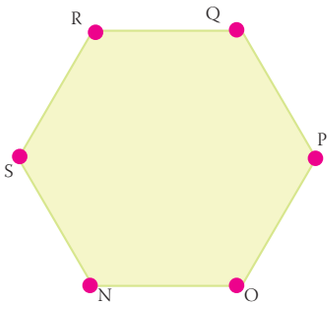
Cantidad de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Nonágono
10	Decágono
12	Dodecágono
20	Isodecágono
N	n-gono

1. Observa los polígonos y ten en cuenta las posibles formas de identificarlos a partir de sus lados.

2. Practica nombrando y clasificando los siguientes polígonos:







Desempeño: Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 109 04/09/2023 14:39:58

Descomposición de polígonos

Con base en la construcción de triángulos, a partir de las diagonales internas del polígono y el patrón encontrado en las subdivisiones por un único vértice, se determina un teorema fundamental para la suma de ángulos interiores en un polígono regular, así:

Teorema de los ángulos interiores

En todo polígono convexo con una cantidad finita de lados n y tomando S para representar la suma de los ángulos internos, se tiene la siguiente expresión:

$$S = 180(n-2)$$

donde n representa el número de lados del polígono.

Ejemplo

Completa la tabla utilizando el teorema de ángulos internos.

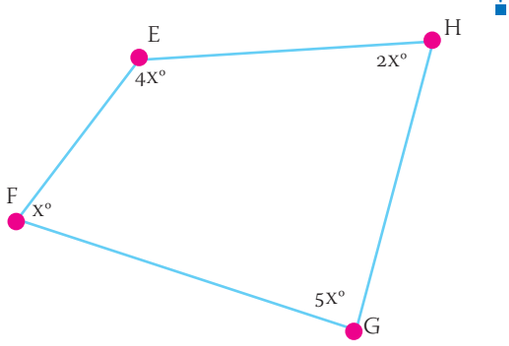
Tipo de polígono	N.º de triángulos internos	N	S
Triángulo	3	1	180 × (1) = 180
Cuadrilátero			
Pentágono		5	
Hexágono			180 × (4) = 520

Teorema de los ángulos exteriores de un polígon

En todo polígono convexo en cada uno de sus vértices, la suma del ángulo interno y el ángulo externo da como resultado 360°.

Ejemplo

Se quiere diseñar un cuadrilátero cuyos ángulos son desconocidos, pero que la relación entre ellos esté dada por cierta cantidad proporcional desconocida. El esquema se muestra en la figura.



Inicialmente, se hace un bosquejo aproximado del cuadrilátero, puesto que no se tienen valores con datos exactos y es allí donde se necesita el uso y planteamiento de ecuaciones.

La figura a construir, por ser un cuadrilátero y polígono convexo, cumple con el teorema de la suma interna de los ángulos. Entonces:

$$S = 180(4-2) = 360°$$

Lo anterior significa que es posible plantear una ecuación que, implícitamente, contenga la suma de las proporciones de los ángulos y que el resultado sea 360°. Con relación a ello, tenemos:

Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 110 04/09/2023 14:39:59

$$E + \quad F + \quad G + \quad H = 360^0$$

$$4x + x + 5x + 2x = 360 \qquad \text{(Planteamiento de la ecuación)}$$

$$12\,x = 360$$

$$x = 360/12 = 30°$$

30° es lo que equivale la proporción correspondiente a cada ángulo.

Diagonales de un polígono

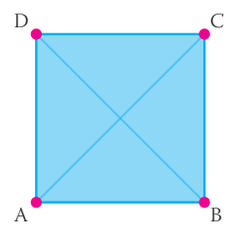
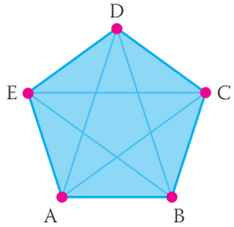
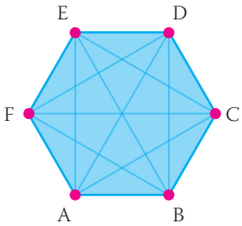
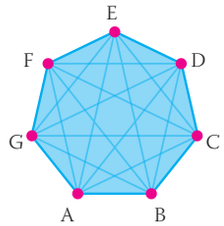
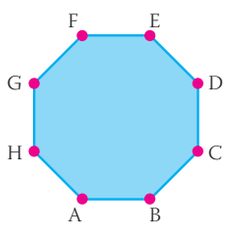
Para terminar de comprender la descomposición de los diferentes polígonos, es importante dar cuenta de las diagonales que se pueden formar con los vértices no consecutivos de un polígono. La expresión que relaciona el número de diagonales tiene en cuenta el número de lados n que conforma al polígono.

La expresión es la siguiente:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Ejemplo

Observemos los siguientes polígonos y el número de diagonales que los conforman.

Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octágono
				
n= 4 D= 2	n= 5 D= 5	n= 6 D= 9	n= D=	n= D=

Cuadrilátero: demostremos que tiene dos diagonales. Si se conoce el número de lados n, que para el cuadrilátero es 4,

aplicando la expresión, tenemos:

$$D = \frac{4(4-3)}{2} = \frac{4(1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Pentágono: calculemos el número de diagonales, conociendo que n=5:

$$D = \frac{5(5-3)}{2} = \frac{5(2)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Comprueba que el hexágono tiene 9 diagonales, y halla las diagonales del heptágono y del octágono.

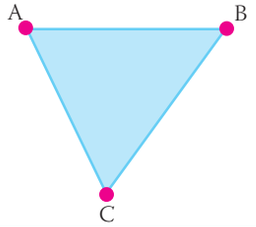
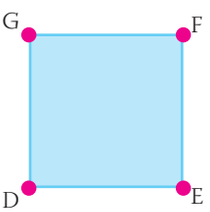
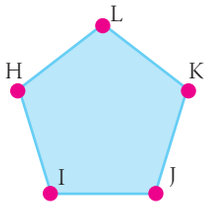
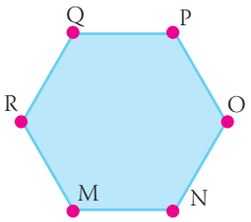
L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 111 04/09/2023 14:40:00

Aplico mis conocimientos

Razonamiento y solución de problemas

1. Dibujando diagonales.

Representa gráficamente las diagonales de los siguientes polígonos y realiza el conteo de las que encontraste.

	
D =	D =
	
D =	D =

2. Relaciona con un camino de color los valores que corresponden, correctamente, a cada una de las columnas.

Observa el ejemplo realizado.

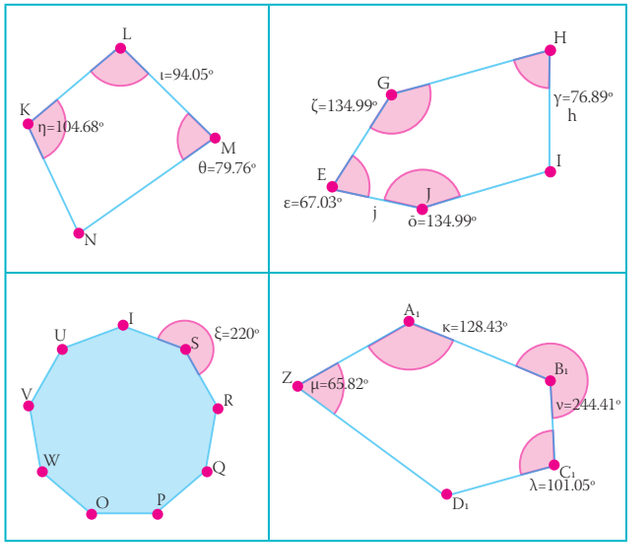
Polígono	S	D	Ángulo interno	Ángulo externo
9-gono	3,240	18	162	190.6
Icosagono	1,800	69	140	210
12-gono	1,260	36	169.4	198
34-gono	2,520	113	157.5	220
16-gono	5,760	351	150	202.5

3. A continuación, se obtiene la medida del ángulo interior de un polígono regular, determina el número de lados que lo conforma.

a. 144° **c.** 60° **e.** 163.6°

b. 152.3° **d.** 158.8° **f.** 170°

4. Encuentra y argumenta el valor del ángulo interior faltante en cada polígono e identifica su ángulo externo aplicando su respectivo teorema.



5. Un pentágono está constituido por 5 lados congruentes al igual que sus ángulos. Se pretende construir un pentágono con la siguiente relación algebraica en cada uno de sus ángulos, donde x representa el valor del ángulo.

Ángulos internos del pentágono según su vértice:

$A = 2x,\ B = 6x + 4,\ C = 3x - 1,\ D = 4x + 2,\ E = 7x - 2$

a. Encuentra la relación algebraica entre x y el valor para cada ángulo interno del polígono.

b. Determina los ángulos exteriores del pentágono.

6. Un arquitecto quiere encontrar una expresión para determinar el número de lados de un polígono, pero solo cuenta con el valor del ángulo interior $\measuredangle_i$. Realizando los cálculos, encuentra las siguientes expresiones:

a. $n = \dfrac{180°}{360° - \measuredangle_i}$ **b.** $n = \dfrac{360° + i}{360° - \measuredangle_i}$

Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 112 04/09/2023 14:40:01

Técnicas de conteo

Aprendo

Principio de multiplicación

Si se toma una muestra que contenga varios eventos, de tal forma que el primer evento se puede realizar de N_1 formas, el segundo evento de N_2 formas, hasta el i-ésimo evento de N_i formas diferentes, la cantidad muestral $N(S)$ es:

$$N(S) = N_1 \times N_2 \times \ldots\ldots \times N_i$$

Ejemplo

¿Cuántos números pares de tres dígitos distintos se pueden formar con los números 1, 4, 7, 8, 9?

Sean a_1, a_2 y a_3 quienes representan los dígitos de unidades, decenas y centenas respectivamente, entonces:

Formas distintas de $a_1 = 2$; formas distintas de $a_2 = 4$; formas distintas de $a_3 = 3$.

Luego, el total de números pares distintos que se pueden formar son

$$a_1 \times a_2 \times a_3 = 2 \times 4 \times 3 = 24$$

Permutación

Una **permutación** es un arreglo de todo o parte de un conjunto de objetos.

Permutación ordinaria: también llamada **permutación sin repetición**.

En el caso de que $N = n$ (es decir, cuando la población es igual a la muestra), entonces la permutación notada como ${}_nP_N = N! = N(N-1)(N-2)\ldots.(2)(1)$ $N!$ es llamado el **factorial de N**,

También usamos la siguiente ecuación para hallar el tamaño del espacio muestral:

$N(S) = {}_nP_N = \dfrac{N!}{(N-n)!}$ donde $N! = \mathrm{N}(N-1)(N-2)\ldots.(2)(1) = N!$ es el factorial de N, y ${}_nP_N$ es la permutación de N en n.

Ejemplo

Cuatro libros distintos de Matemáticas, seis diferentes de Física y dos diferentes de Química se colocan en un estante. ¿De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si los libros de cada asignatura deben estar todos juntos?

Los libros de Matemáticas pueden ordenarse entre ellos de ${}_4P_4 = 4!$ formas, los libros de Física de ${}_6P_6 = 6!$ formas, los libros de Química de ${}_2P_2 = 2!$ formas y los tres grupos de ${}_3P_3 = 3!$ formas.

Luego, el número de ordenaciones será:

$$4! \times 6! \times 2! \times 3! = 207{,}360$$

Desempeño: Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 113 04/09/2023 14:40:03

Combinación

Al tomar una muestra de n elementos, no se tiene en cuenta el orden ni la repetición de dichos elementos. La **combinatoria** permite calcular el tamaño del espacio muestral en este tipo de experimentos aleatorios. Su notación es:

$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!}$ donde $\binom{N}{n}$ se llama **combinatoria de N en n**.

Ejemplo

De 13 estudiantes inscritos para el campeonato de baloncesto, se deben escoger 5 titulares para comenzar la primera ronda. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar los titulares?

De las 13 personas se deben escoger 5, no importa el orden en que se escojan, porque lo importante es que queden en la titular. Aplicamos la ecuación:

$$\binom{13}{5} = \frac{13!}{(13-5)!5!}$$

$$\binom{13}{5} = \frac{13\times12\times11\times10\times9\times\cancel{8!}}{\cancel{8!}\times5!} = \frac{13\times12\times11\times10\times9}{5!} = \frac{13\times\cancel{12}\times11\times\cancel{10}\times9}{\cancel{5\times4\times3\times2\times1}} = 13\times11\times9 = 1{,}287$$

Hay 1,287 formas de escoger a 5 estudiantes de 13, sin importar el orden.

Aplico mis conocimientos

Razonamiento y solución de problemas

1. En un restaurante ofrecen cinco tipos de entradas, cuatro tipos de ensaladas, cuatro tipos de bebidas y tres tipos de postres. ¿Cuántas comidas diferentes de una entrada, una ensalada, una bebida y un postre se pueden elegir?

2. Un grupo de cinco amigos decide realizar un viaje en carro para recorrer el norte del país, ¿de cuántas maneras se pueden organizar para conducir el vehículo?

3. Un grupo de sexto grado tiene 32 estudiantes, ¿de cuántas maneras se pueden escoger tres personas para representar el curso en un comité?

4. El encargado de la biblioteca desea colocar cinco libros en un estante, ¿de cuántas maneras los puede colocar si los debe escoger de un grupo de veinte libros?

5. Veinte atletas participan en una carrera de 400 m planos. ¿De cuántas maneras pueden obtener las respectivas medallas de oro, plata y bronce?

6. Un banco cuenta con cajas de seguridad marcadas con números de tres cifras. Si ninguna comienza con cero, ¿con cuántas posibles cajas de seguridad cuenta el banco?

7. En cierta ciudad del país están autorizadas las placas para los bicitaxis, estas constan de dos números seguidos de una letra. ¿Cuántas placas posibles existen para los bicitaxis?

8. Un examen consta de diez preguntas para ser aprobado; un estudiante debe contestar correctamente al menos siete de ellas. ¿Cuántas formas tiene el estudiante de aprobar con la nota mínima el examen?

9. Andrea y Katherine tienen un almacén de modas y van a organizar la vitrina con 6 maniquíes que tengan 7 opciones de vestido, ¿cuáles son las posibles opciones para organizar la vitrina?

Encuentra el número de posibles resultados de experimentos aleatorios, con reemplazo y sin reemplazo, usando técnicas de conteo adecuadas, y argumenta la selección realizada en el contexto de la situación abordada. Encuentra la probabilidad de eventos aleatorios compuestos.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 114 04/09/2023 14:40:03



Educación Económica y Financiera (E.E.F.)

Inversión

Aprendo

Inversión: en economía y finanzas se habla de inversión a la adquisición de bienes de producción con el fin de que se produzcan más bienes, que también pueden ponerse en ahorros o compras de acciones, bonos y demás.

Para invertir hay que tener presentes 3 elementos de análisis a la hora de hacerlo:

De los tipos de interés: si se tratara de una inversión con dinero prestado, hay que tener presente que los intereses de los préstamos no pueden superar los porcentajes de ganancia en la inversión.

De la capacidad: si la empresa no hace uso total de la capacidad, significa que no requiere de inversión, pues aún no llega al 100 % de uso.

De la confianza en el futuro: un estado de confianza generado en el futuro anima la inversión. Un estado de duda, desconfianza o incertidumbre genera un clima poco propicio para invertir.

Veamos una propuesta de inversión y el análisis de esta:

Carlos y José proponen realizar una inversión a la compañía Aros, en la que se pide un préstamo que genera un interés de 20 % durante un año, y se tiene previsto que realizando la inversión se genera una rentabilidad del 20 %.

a. **Los tipos de interés:** no tendrán problema, ya que aunque los porcentajes sean iguales, el préstamo solo estará presente durante 1 año, y a partir de allí la compañía contará con su 20 % libre.

b. **La capacidad:** es sencillo responder, pues al ser algo nuevo que genere rentabilidad, es suficiente para determinar su uso.

c. **La confianza en el futuro:** no existe información suficiente para determinar este criterio.

Practico y aplico

1. Consulta qué tipo de inversiones están disponibles en tu país, y qué características tienen en:
   a. rentabilidad
   b. plazos

2. Plantea una situación en donde sea óptimo invertir, y una donde no, teniendo en cuenta los 3 elementos de análisis a la hora de invertir.

L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 115 04/09/2023 14:40:04

Evaluación tipo Saber

Solución de problemas

1. Dada la función $f(x) = 8x2 - 2x - 15$, es correcto afirmar que el rango y raíces (ceros relativos) son:

A. $Ran = \left[\frac{-121}{8}, \infty\right); \frac{3}{2}$ y $\frac{-5}{4}$

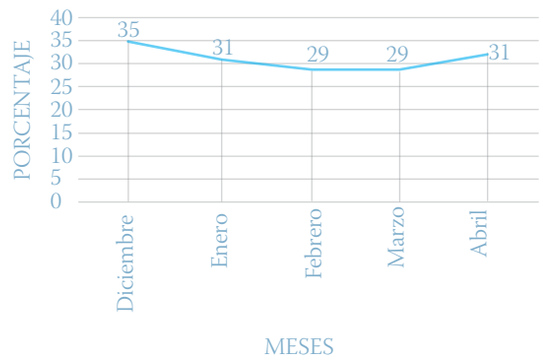
B. $Ran = \left(-\infty, \frac{-121}{8}\right]; \frac{-3}{2}$ y $\frac{5}{4}$

C. $Ran = \left(-\infty, \frac{-59}{4}\right]; 5$ y 1

D. $Ran = \left[\frac{-59}{4}, \infty\right); \frac{2}{3}$ y $\frac{-4}{5}$

Responde las preguntas de la 2 a la 4 de acuerdo con la siguiente información:

La gráfica de función cuadrática que se puede usar para aproximar el porcentaje de luz que se consume en un hogar en los meses de diciembre a abril es:



2. La expresión que modela mejor la anterior situación es:

A. $L(t) = t2 + 35$

B. $L(t) = t2 - 5t + 35$

C. $L(t) = -5t + 35$

D. $L(t) = t3 - 5t + 35$

3. Los meses representados por la variable t es el número de meses a partir de diciembre. El intervalo que define la expresión de la gráfica será:

A. $0 \leq t \leq 5$

B. $1 \leq t \leq 6$

C. $0 \leq t \leq 4$

D. $0 \leq t \leq 5$

4. Si esta tendencia continúa después de abril, el porcentaje de consumo de luz que se puede observar en agosto será de:

A. 50 % **B.** 49 % **C.** 71 % **D.** 59 %

5. Los polígonos son construcciones geométricas planas que contienen una cantidad finita de ángulos. La definición más acertada de un polígono es:

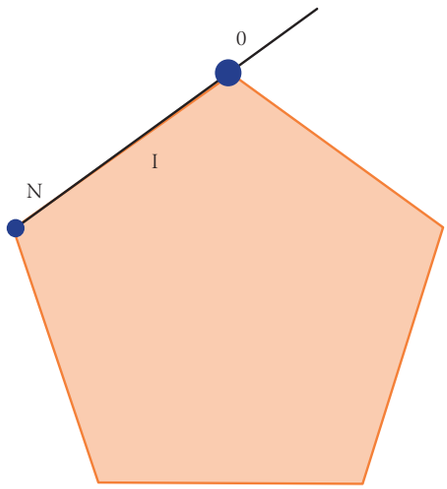
A. Un polígono consta de n lados finitos, los cuales se encuentran paralelos entre sí.

B. Cada lado de un polígono interseca a otros dos lados únicamente en sus extremos.

C. Figura cerrada, con lados y ángulos infinitos que se intersecan entre sí.

D. Cada lado del polígono cruza a otros dos lados del polígono y, además, es una figura cerrada.

Las preguntas 6 y 7 se responden de acuerdo al polígono que se muestra en la siguiente figura:



L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 116 04/09/2023 14:40:04

6. El polígono de la figura es regular debido a que

A. es una figura cerrada y todos sus segmentos son paralelos.

B. al trazar una recta que pase por los lados, la recta no toca el interior del polígono.

C. los lados del polígono, así como sus ángulos, son congruentes.

D. la suma de los ángulos internos y externos en un vértice suman 360°.

7. El valor de los ángulos internos, el externo a un vértice y la suma de los ángulos internos da como resultado, respectivamente

A. 152°, 460°, 540°

B. 152°, 252°, 540°

C. 108°, 152°, 460

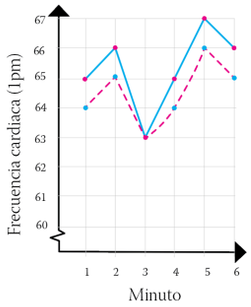
D. 108°, 252°, 540°

8. La siguiente tabla muestra la frecuencia cardiaca medida en latidos del corazón por minuto (lpm) de Pedro y Claudia, durante 6 minutos.

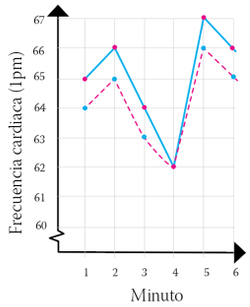
Minutos	1	2	3	4	5	6
Frecuencia cardiaca de Pedro (lpm)	64	65	62	65	67	66
Frecuencia cardiaca de Claudia (lpm)	65	66	62	64	66	65

¿Cuál de las siguientes gráficas representa correctamente la frecuencia cardiaca de Pedro y Claudia durante los 6 minutos?

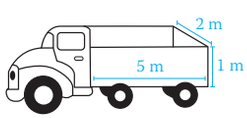
A.

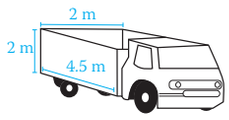


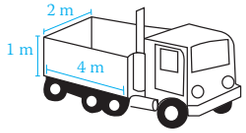
B.

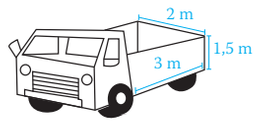


9. Para remodelar un edificio, un arquitecto compra 9 m^3 de arena. La empresa que contrata para transportar el material dispone de cuatro tipos de volquetas.









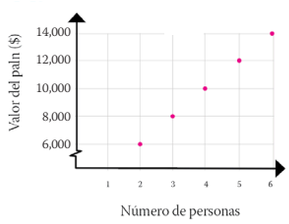
¿En cuál de las siguientes volquetas es posible transportar la arena en un solo viaje sin que sobre espacio?

10. Una agencia de turismo ofrece los siguientes precios para viajes a un determinado destino de acuerdo con el número de personas que tomen conjuntamente el plan.

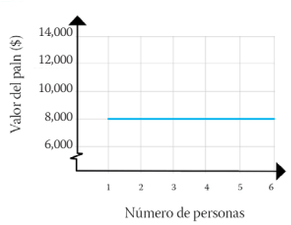
Número de personas	Valor del plan (Q)
2	6,000
3	8,000
4	10,000
5	12,000
6	14,000

¿Cuál de las siguientes gráficas representa correctamente la información de la tabla?

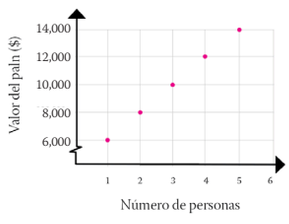
A.



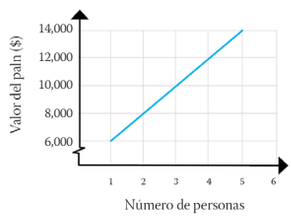
B.



C.



D.



L9_Unidad_3_2021 Indiv.indd 117 04/09/2023 14:40:06

Unidad 4

Trigonometría básica, sólidos y probabilidad

¿Qué aprenderé?

- Introducción a la trigonometría
- Cuerpos geométricos
- Probabilidad

¿Qué lograré?

✔ Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

✔ Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

✔ Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).

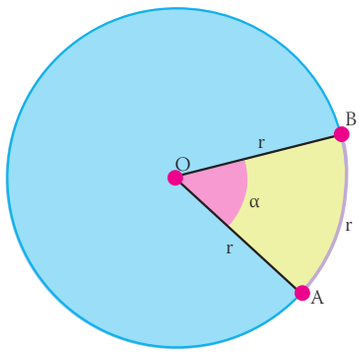


Medida de ángulos

Aprendo

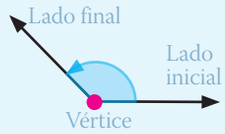
Radianes

Los ángulos se miden con el **radián** y el **grado sexagesimal**. Considera una circunferencia de radio r, un ángulo central α y el arco AB como se muestra en la gráfica.



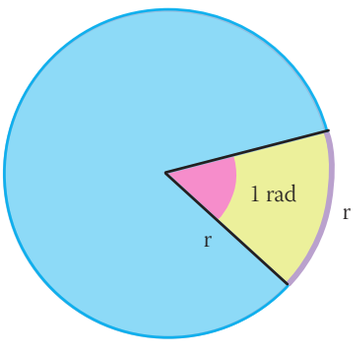
Recuerda que...

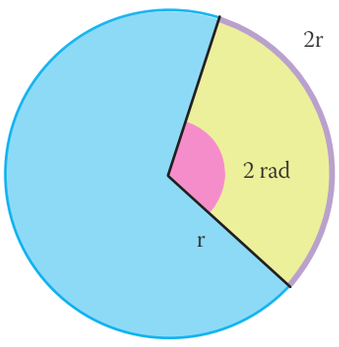
Un ángulo α es el conjunto de puntos generados por la rotación de una semirrecta alrededor de su origen, desde una posición inicial o *lado inicial*, hasta una final o *lado final*. El origen de la semirrecta se llama **vértice del ángulo.** Ver gráfica:

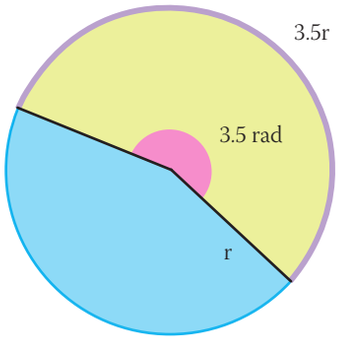


La flecha que se observa en la gráfica indica si el ángulo es positivo o negativo. En este caso es *positivo* ya que el sentido es contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Cuando está en sentido del movimiento de las manecillas del reloj, el ángulo es *negativo*.

Cuando la longitud del arco AB es igual a la longitud del radio de la circunferencia, se dice que la medida del ángulo α es un radián *(rad)*. En consecuencia, un radián es el ángulo central de una circunferencia que corresponde a un arco de circunferencia AB que tiene una longitud igual al radio de dicha circunferencia. Por ejemplo, si se toma un arco de circunferencia cuya longitud es el radio r, el ángulo central correspondiente tendría una medida de 1 *rad*. Si se toma un arco de circunferencia cuya longitud es dos radios *(2r)*, el ángulo central correspondiente tendrá una medida de 2 *rad*. Si se toma un arco de circunferencia cuya longitud es tres radios y medio (3.5r), el ángulo central correspondiente tendrá una medida de 3.5 *rad*, y así sucesivamente, observa los ejemplos:







De lo anterior se deduce que:

1. La medida de un ángulo NO depende del valor del radio, ya que, sea cual sea el radio r, el ángulo central correspondiente al tamaño del arco igual a la longitud del radio, es siempre el mismo.

2. Si se toma un arco de circunferencia cuya longitud es $2\pi r$, el ángulo central correspondiente tendría una medida de 2π *rad*, esto corresponde a un ángulo de una vuelta completa en la circunferencia, cuyo valor es aproximadamente 6,2831 *rad*.

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

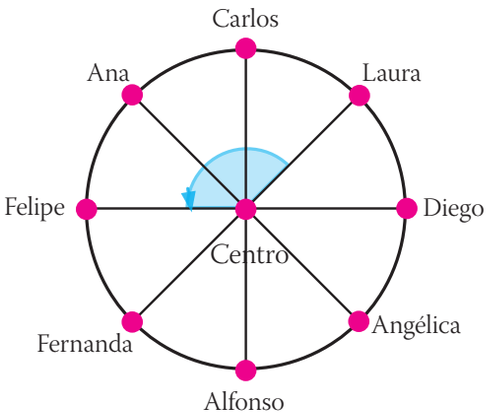
L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 119 4/09/23 2:54 p. m.

Ejemplo

Laura está celebrando su cumpleaños e invita a sus amigos a uno de los parques de diversiones de su ciudad. A ella le encanta subirse a la rueda de la fortuna que tiene ocho cabinas con un asiento cada una, y siempre elige la cabina roja. Felipe, uno de sus amigos, se ubica en la cabina azul oscura, observa la imagen.



¿Cuánto mide el ángulo positivo que forma la cabina donde se encuentra Laura, el centro de la rueda de la fortuna y la cabina donde se encuentra Felipe?



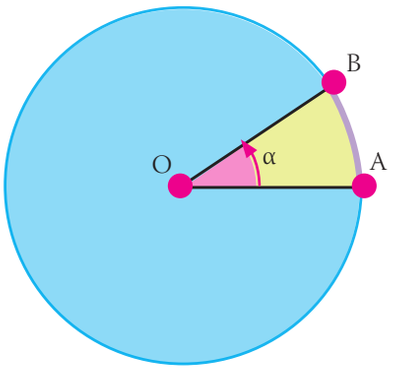
Solución: La gráfica muestra el ángulo positivo formado por la cabina donde se encuentra Laura, el centro de la rueda de la fortuna y la cabina donde se encuentra Felipe.

Al observar la gráfica, Carlos y Ana se encuentran entre Laura y Felipe, por lo tanto, están separados por 3 ángulos que miden $\frac{\pi}{4}$ rad cada uno, esto es, $3\times\frac{\pi}{4}$ rad.

Así, el ángulo positivo que forman la cabina donde se encuentra Laura, el centro de la rueda de la fortuna y la cabina donde se encuentra Felipe es $\frac{3\pi}{4}$ rad.

Grados, minutos y segundos

Ahora bien, si un grado sexagesimal se divide en sesenta partes iguales, cada una de esas partes es un **minuto** representado por el símbolo '. Se deduce entonces que un grado sexagesimal tiene sesenta minutos, esto es, 1° = 60'. De igual manera, si un grado sexagesimal se divide en 3,600 partes iguales, o lo que es lo mismo, un minuto se divide en 60 partes iguales, cada una de esas partes es un segundo, representado por el símbolo ". Se deduce, entonces, que un minuto es igual a sesenta segundos, esto es, 1' = 60" y por lo tanto, 1° = 60' = 3,600".



Ejemplo

Ana compró *pizza* para compartir en el cumpleaños de Laura con todos los amigos y desea que a todos les correspondan porciones de igual tamaño. Diego le sugiere que divida la *pizza* en 8 porciones iguales, tal y como se muestra en la imagen:

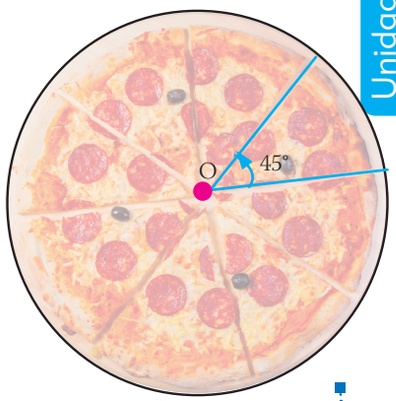


¿Cuántos grados mide un ángulo central formado por una porción de *pizza*?

DBA: Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 120 4/09/23 2:54 p. m.

Componente: Numérico-variacional



Solución: Dado que un ángulo de una vuelta completa mide 360°, se puede determinar la medida del ángulo central formado por una porción de *pizza*, teniendo en cuenta que esta se va a dividir en 8 porciones iguales. Entonces, dividimos los 360° entre 8, esto es, $\frac{360^\circ}{8}$. Simplificando se obtiene 45°.

El ángulo central formado por una porción de *pizza* mide 45°.

Conversiones

Al convertir de una unidad de medida de ángulos a otra, se deben considerar los siguientes casos:

1. **Grados a radianes:** dado α, un ángulo medido en grados, la medida del ángulo α en radianes se encuentra usando la siguiente fórmula: $\frac{\alpha \times \pi}{180^\circ}$.

2. **Radianes a grados:** dado α, un ángulo medido en radianes, la medida del ángulo α en grados se encuentra usando la siguiente fórmula: $\frac{\alpha \times 180^\circ}{\pi}$.

3. **Grados decimales a grados, minutos y segundos:** se toma la parte decimal del grado y se multiplica por 60, así se obtienen los minutos. Si el resultado obtenido también tiene decimales, se toman estos decimales de minuto y se multiplican por 60, así se encuentran los segundos. Por último, se da la respuesta en grados, minutos y segundos.

4. **Grados, minutos y segundos a grados decimales:** considerando que 1° = 60' = 3,600", se dividen los minutos entre 60, luego se dividen los segundos entre 3,600, ambos resultados se suman a la cantidad de grados inicial para dejarlo expresado en grados decimales.

5. **Segundos o minutos a grados:** si el ángulo está en segundos, se divide entre 3,600 y el resultado es la medida del ángulo en grados. Si el ángulo está en minutos, se divide entre 60 y el resultado obtenido es la medida del ángulo en grados.

6. **Grados a segundos o minutos:** para convertir el ángulo de grados a segundos, se multiplican los grados por 3,600 y el resultado obtenido es la medida del ángulo en segundos. Para convertir un ángulo de grados a minutos, se multiplican los grados por 60 y el resultado es la medida del ángulo en minutos.

Ejemplo

¿A cuánto equivalen 123.73° en grados, minutos y segundos?

Paso 1: Se toman los decimales de grado y se multiplican por 60: $0.73^\circ = (0.73 \times 60)' = 43.8'$

Paso 2: Se toman los decimales de y se multiplican por 60, así:

$$0.8' = (0.8 \times 60)'' = 48''$$

Paso 3: Finalmente, se encuentra que:

$$123.73^\circ = 123^\circ + 0.73^\circ = 123^\circ\ 43.8' = 123^\circ\ 43'+0.8'' = 123^\circ\ 43'\ 48''$$

En conclusión, 123.73° equivalen a 123° 43' 48".

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 121 4/09/23 2:54 p. m.

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Transforma las siguientes medidas a segundos:

a. 21°10'32"
b. 15°40"
c. 12°50'40"
d. 33°33'33"

2. Transforma estas medidas a grados, minutos y segundos:

a. 450"
b. 58'140"
c. 4 500"
d. 1°2 000"

3. Convierte las siguientes medidas de grados a radianes:

a. 340°
b. 280°
c. 350°
d. 320°
e. −30°
f. −53°
g. −125°
h. −330°
i. 60°
j. 100°

4. Convierte las siguientes medidas de radianes a grados:

a. 200π rad
b. $\frac{6\pi}{9}$ rad
c. $\frac{\pi}{10}$ rad
d. $\frac{3\pi}{5}$ rad
e. $\frac{2\pi}{9}$ rad
f. $\frac{\pi}{9}$ rad
g. $\frac{\pi}{5}$ rad
h. 8π rad
i. $\frac{3\pi}{2}$ rad
j. 2π rad

5. Expresa en grados, minutos y segundos cada uno de los siguientes ángulos:

a. 67. 87°
b. 450. 7°
c. −83.6°
d. −29.13°
e. 85.98°

6. En una circunferencia de radio r con un ángulo central α en radianes, determina un arco de longitud $s = r\alpha$, es decir: longitud de arco = radio × ángulo central en radianes.

El minutero de un reloj mide 12 cm, ¿qué distancia recorre la punta del minutero durante 20 minutos?

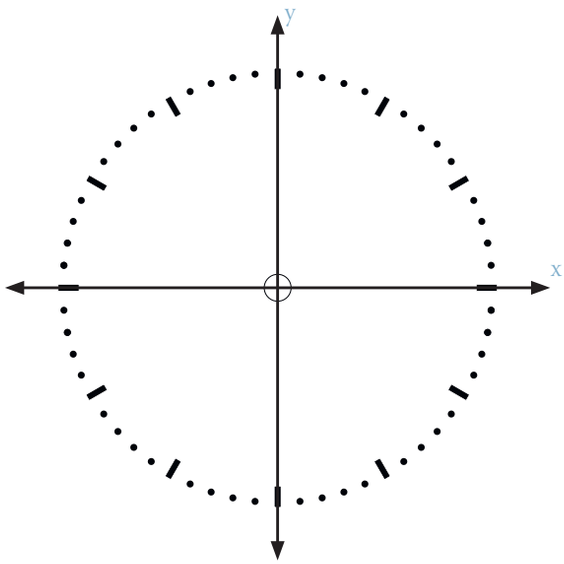
Solución de problemas

7. En una competencia de karts, Ana ha registrado un tiempo de 20'12" en llegar a la meta, mientras que Angélica ha registrado un tiempo de 1,210". ¿Quién llegó primero a la meta?

8. Felipe quiso darle la vuelta a todo el parque de diversiones, para lograrlo tardó 197', ¿cuánto tiempo gastó en minutos y segundos?

9. Laura, Alfonso y Diego están resolviendo un acertijo propuesto en el parque de diversiones. Laura dedica 2 minutos 40 segundos, Alfonso 140 segundos y Diego 3 minutos 5 segundos, ¿cuánto tiempo le han dedicado a resolver el acertijo entre los tres? ¿Cuánto tiempo es en segundos?

10. De acuerdo con la gráfica, marca diferentes ángulos en posición normal. ¿Qué hora está indicando cada uno de los ángulos marcados, suponiendo que el semieje positivo de la abscisa representa la manecilla que indica la hora?



DBA: Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Thales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 122 4/09/23 2:54 p. m.

Componente: Numérico-variacional

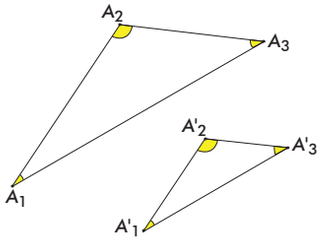
Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

Aprendo

Semejanza de triángulos

AAA

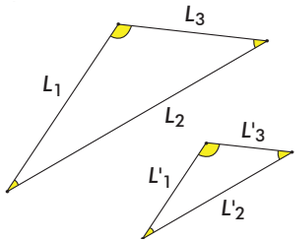
Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes.



$$A_1 \cong A'_1, A_2 \cong A'_2, A_3 \cong A'_3$$

LLL

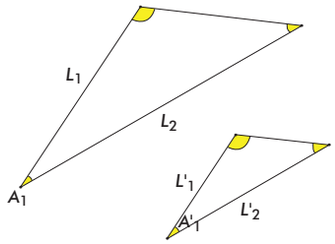
Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.



$$\frac{L_1}{L'_1} = \frac{L_2}{L'_2} = \frac{L_3}{L'_3}$$

LAL

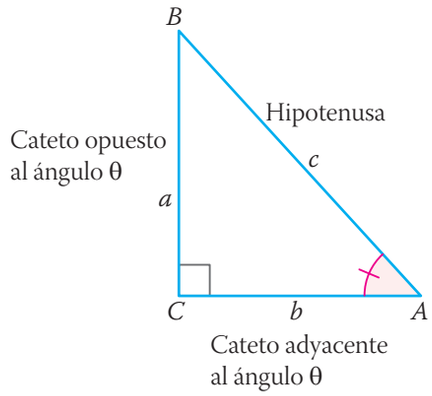
Dos triángulos son semejantes si dos pares de lados son proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes.



$$\frac{L_1}{L'_1} = \frac{L_2}{L'_2}; A_1 \cong A'_1$$

Razones trigonométricas

En el triángulo rectángulo ABC, c es la medida de la hipotenusa, a es la medida del cateto opuesto al ángulo θ y b la medida del cateto adyacente al ángulo θ.



Las razones trigonométricas son:

$$sen\,\theta = \frac{medida\ del\ cateto\ opuesto}{medida\ de\ la\ hipotenusa} = \frac{a}{c} \qquad \csc\theta = \frac{medida\ de\ la\ hipotenusa}{medida\ del\ cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{medida\ del\ cateto\ adyacente}{medida\ de\ la\ hipotenusa} = \frac{b}{c} \qquad sec\,\theta = \frac{medida\ de\ la\ hipotenusa}{medida\ del\ cateto\ adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\theta = \frac{medida\ del\ cateto\ opuesto}{medida\ del\ cateto\ adyacente} = \frac{a}{b} \qquad \cot\theta = \frac{medida\ del\ cateto\ adyacente}{medida\ del\ cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

Desempeño: Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 123 4/09/23 2:54 p. m.

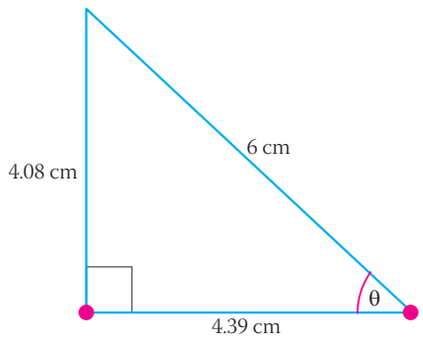
Ejemplo

Halla las razones trigonométricas para el ángulo θ del siguiente triángulo rectángulo: La hipotenusa es 6 cm. Para θ la longitud del cateto opuesto es 4,08 cm y la del adyacente es 4.39 cm.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{4.08}{6} = 0.68 \qquad \csc\theta = \frac{hipotenusa}{opuesto} = \frac{6}{4.08} \approx 1.47$$

$$\cos\theta = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{4.39}{6} \approx 0.73 \qquad \sec\theta = \frac{hipotenusa}{adyacente} = \frac{6}{4.39} \approx 1.37$$

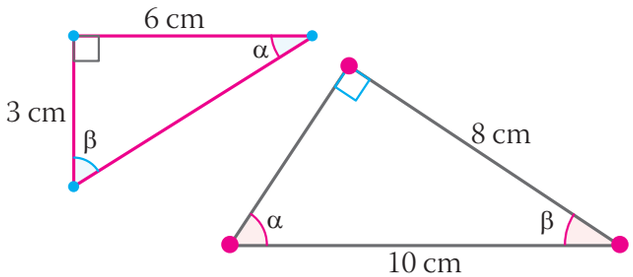
$$\tan\theta = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{4.08}{4.39} \approx 0.93 \qquad \cot\theta = \frac{adyacente}{opuesto} = \frac{4.39}{4.08} \approx 1.08$$



Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Para cada triángulo halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos α y β.



2. En cada caso, para un triángulo rectángulo se conocen las razones trigonométricas dadas, utiliza esa información para construir el triángulo.

a. En un triángulo rectángulo se sabe que $tan\theta = \frac{12}{5}$, determina las otras cinco razones trigonométricas del ángulo θ.

b. En un triángulo rectángulo se sabe que $cot\theta = \frac{1}{2}$, determina las otras cinco razones trigonométricas del ángulo θ.

Solución de problemas

3. Fernanda lanza dardos en un tablero como el que se muestra en la siguiente imagen.



a. Si el dardo cae en el en primer cuadrante en la posición $(4, 3)$, ¿qué distancia hay entre el centro del tablero y la posición del dardo?

b. El segundo dardo que lanza cae en la posición $(-6, -8)$, ¿en cuál cuadrante quedó ubicado el segundo dardo?

4. Pablo tiene 3 relojes sobre su mesa, el primer reloj marca las 12 horas 15 minutos, el segundo las 3 horas 45 minutos y el tercer reloj las 6 horas 45 minutos.

a. ¿Qué ángulo se forma entre la manecilla de la hora y el minutero de cada una de las horas indicadas?

b. ¿Qué distancia en grados hay del minutero del primer reloj al minutero del segundo reloj?

DBA: Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Thales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 124 4/09/23 2:54 p. m.

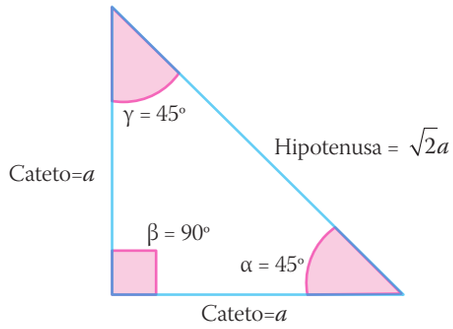
Componente: Numérico-variacional

Razones trigonométricas de ángulos notables

Aprendo

Razones trigonométricas para ángulos de 45°

Observa el triángulo rectángulo ABC:



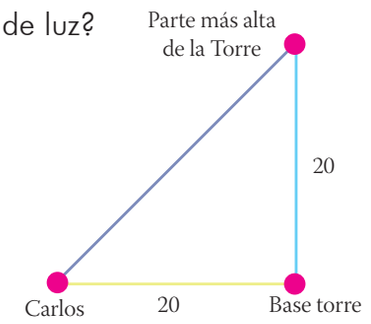
La medida de cada cateto es a y la medida de la hipotenusa es $\sqrt{2}a$. Las razones trigonométricas para un ángulo de 45° son:

Razón trigonométrica	Definición	Valor
Seno	$\text{sen } 45° = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Coseno	$\cos 45° = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Tangente	$\tan 45° = \frac{a}{a} = 1$	$\tan 45° = 1$
Cotangente	$\cot 45° = \frac{a}{a} = 1$	$\cot 45° = 1$
Secante	$\sec 45° = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$
Cosecante	$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$	$\csc 45° = \sqrt{2}$

Ejemplo

Carlos, amigo de Laura, está parado a 20 metros de la base de una torre de luz del parque de diversiones la cual tiene 20 metros de altura. Laura, quien lo observa, le pregunta:

Carlos, ¿qué distancia te separa de la parte más alta de la torre de luz?



Solución: Ten en cuenta que en un triángulo rectángulo el lado más largo es la hipotenusa. Según la gráfica, la distancia que separa a Carlos de la parte más alta de la torre de luz, en el triángulo que se muestra allí, es justamente la hipotenusa. Dado que la medida de los catetos es 20 metros, se puede afirmar que el valor de a = 20, por lo tanto la hipotenusa en un triángulo rectángulo con ángulos

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

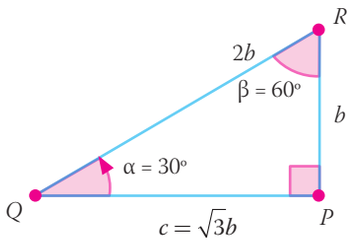
L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 125 4/09/23 2:54 p. m.

internos agudos de 45° tiene una longitud de $\sqrt{2}\,a$, es decir, $\sqrt{2}\times 20 = 20\sqrt{2}$.

La distancia que separa a Carlos de la parte más alta de la torre de luz es $20\sqrt{2}$ metros.

Razones trigonométricas para ángulos de 30° y 60°

Todo triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 30° tiene el otro de 60°, y las medidas entre los catetos y la hipotenusa se comportan como se ve en la siguiente figura:



1. En todo triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 30°, la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30° es la mitad de la longitud de la hipotenusa.

Razón trigonométrica	Definición	Valor
$\text{sen } 30° = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$	$\text{sen } 30° = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$	$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$
$\cos 30° = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$	$\cos 30° = \frac{c}{2b} = \frac{\sqrt{3}b}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan 30° = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$	$\tan 30° = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{3}b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot 30° = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{cateto opuesto}}$	$\cot 30° = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}b}{b} = \sqrt{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sec 30° = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyacente}}$	$\sec 30° = \frac{2b}{\sqrt{3}b} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\csc 30° = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}}$	$\csc 30° = \frac{2b}{b} = 2$	$\csc 30° = 2$

Razón trigonométrica	Definición	Valor
$\text{sen } 60° = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$	$\text{sen } 60° = \frac{c}{2b} = \frac{\sqrt{3}b}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 60° = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$	$\cos 30° = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$
$\tan 60° = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$	$\tan 60° = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}b}{b} = \sqrt{3}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$
$\cot 60° = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{cateto opuesto}}$	$\cot 60° = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{3}b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sec 60° = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyacente}}$	$\sec 60° = \frac{2b}{b} = 2$	$\sec 60° = 2$
$\csc 60° = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}}$	$\csc 60° = \frac{2b}{\sqrt{3}b} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

DBA: Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Thales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 126 4/09/23 2:54 p. m.

Componente: Numérico-variacional

Ejemplo

Halla la medida del cateto opuesto al ángulo β

$$\text{sen } 60° = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{\overline{EA}}{\textit{longitud tramo 2}}$$

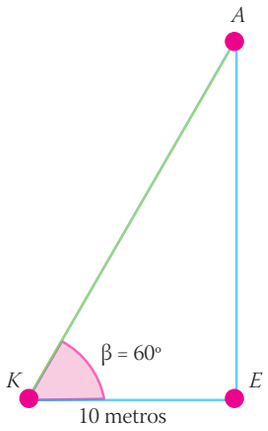
$$\text{sen } 60° = \frac{\overline{EA}}{10\sqrt{3}\ m}$$

$$10\sqrt{3} \times \text{sen } 60° = \overline{EA}$$

$$\overline{EA} = 10\sqrt{3}\ m \times \text{sen } 60°$$

$$\overline{EA} = 10\sqrt{3}\ m \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{EA} = 15\ m$$



La distancia del punto E al punto A ($\overline{EA}$) es 15 m. De forma análoga se puede verificar que se llega al mismo resultado con las razones tangente, cotangente y cosecante.

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Encuentra los valores de las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 100 cm. Recuerda que los ángulos agudos, de los triángulos rectángulos que tienen los catetos iguales, miden 45° cada uno.

2. Calcula cada una de las siguientes expresiones:

a. $4\,\text{sen}45^\circ + 3\cos 45^\circ \cdot \tan 45^\circ =$

b. $\dfrac{6\csc 45^\circ - 2\sec 45^\circ + 4\text{sen}45^\circ}{3\cot 45^\circ} =$

c. $\sec 45^\circ + \cos 45^\circ \cdot 5\cot 45^\circ - \text{sen}45^\circ =$

3. Calcula las siguientes expresiones:

a. $6\text{sen}30^\circ + \tan 30^\circ \cdot 3\csc 30^\circ =$

b. $\dfrac{4\cos 30^\circ}{3\,\text{sen}30^\circ} + 2\tan 30^\circ \cdot \csc 30^\circ =$

c. $2\text{sen}30^\circ + \sqrt{3}\cos 30^\circ . \cot 30^\circ - (\sec 30^\circ)^2 =$

4. Calcula las siguientes expresiones:

a. $3\csc 60^\circ + 8\cos 60^\circ - 2\sec 60^\circ =$

b. $\text{sen}60^\circ \cdot \dfrac{3\tan 60^\circ}{\cot 60^\circ} =$

c. $\cos 60^\circ + 4\sec 30^\circ - 2\text{sen}45^\circ \cdot 3\csc 30^\circ =$

d. $\dfrac{\cot 60^\circ}{\tan 60^\circ} \cdot 3\,\text{sen}45^\circ + 5\sec 30^\circ + \sqrt{3}\tan 30^\circ =$

e. $8\text{sen}60^\circ \cdot 5\cos 60^\circ + \sqrt{3}\csc 30^\circ - \dfrac{2\sec 45^\circ}{\tan 30^\circ} =$

Solución de problemas

5. Carlos observa a su amiga Laura desde la parte alta del mirador del parque, que tiene 30 metros de altura con un ángulo de depresión de 45°. Si su amiga se encuentra ubicada en el parque a 30 metros de la base del mirador, ¿qué distancia separa a Carlos y a Laura? (Un ángulo de depresión es un ángulo formado por dos líneas imaginarias llamadas **línea visual** o **línea de visión** y la línea horizontal. En este caso, el observador se encuentra por encima del objeto observado).

6. Encuentra la altura del árbol más pequeño del parque, teniendo en cuenta que la persona que lo poda utiliza una escalera de 27 metros que alcanza la cima, y entre la escalera y el suelo se forma un ángulo de 60°.

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

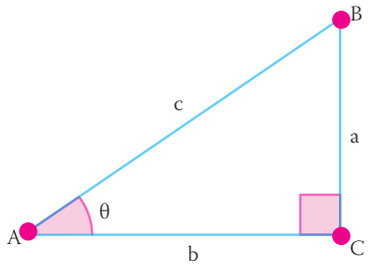
L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 127 4/09/23 2:54 p. m.

Relaciones entre razones trigonométricas

Aprendo

Identidades recíprocas y pitagóricas

Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo ABC que se muestra en la gráfica,



con relación al ángulo θ se pueden definir las siguientes relaciones entre razones trigonométricas:

1. $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ **2.** $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ **3.** $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ **4.** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{csc\,\theta}$ **5.** $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

6. Identidad pitagórica: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

7. $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$ **8.** $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ **9.** $\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

Para el triángulo rectángulo ABC que aparece en la gráfica anterior, se establecen, con relación al ángulo θ, las seis razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{c} \quad \cos\theta = \frac{b}{c} \quad \tan\theta = \frac{a}{b} \quad \cot\theta = \frac{b}{a} \quad \sec\theta = \frac{c}{b} \quad \csc\theta = \frac{c}{a}$$

Adicionalmente, se cumple la relación entre el cuadrado de la hipotenusa y la suma de los cuadrados de los catetos, esto es, $c^2 = a^2 + b^2$ (teorema de Pitágoras).

Recuerda que...

Para verificar una igualdad, se deben realizar las transformaciones necesarias en ambos lados de ella para llegar al mismo resultado en ambos miembros. Por ejemplo, para verificar que $\tan 45° = \dfrac{\operatorname{sen} 45°}{\cos 45°}$,

reemplazamos el valor de cada razón trigonométrica ($\tan 45° = 1$, $\operatorname{sen} 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$) en ambos miembros de la igualdad así:

$$1 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Aplicando ley de extremos y medios, obtenemos: $1 = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, y simplificando, tenemos: $1 = 1$

como llegamos a una igualdad cierta, la igualdad inicial queda demostrada.

DBA: Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Thales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 128 4/09/23 2:54 p. m.

Componente: Numérico-geométrico

Aplico mis conocimientos

Comunicación

1. Verifica las siguientes relaciones trigonométricas:

a. $(\operatorname{sen} 30° - \cos 30°)(\operatorname{sen} 30° + \cos 30°) = \operatorname{sen}^2 30° - \cos^2 30°$

b. $\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)^2 = \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4}$

c. $1 + \dfrac{\cos 60°}{\operatorname{sen} 60°} = \dfrac{\operatorname{sen} 60° + \cos 60°}{\operatorname{sen} 60°}$

2. Con ayuda de una calculadora, verifica cada igualdad reemplazando los valores de las razones trigonométricas involucradas:

a. $\cos^2 50° = 1 - \operatorname{sen}^2 50°$

b. $\cos 35° = \dfrac{1}{\sec 35°}$

c. $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{5} + \cos^2\frac{\pi}{5} = 1$

d. $\sec^2 80° = 1 + \tan^2 80°$

e. $\csc^2 20° = 1 + \cot^2 20°$

f. $\operatorname{sen} 20° = \dfrac{1}{\csc 20°}$

g. $\tan 80° = \dfrac{\operatorname{sen} 80°}{\cos 80°}$

h. $\operatorname{sen}^2 60° = 1 - \cos^2 60°$

Razonamiento

3. Encuentra los valores de las seis razones trigonométricas si $\csc\theta = \frac{5}{3}$ y

a. θ está en el primer cuadrante.

b. θ está en el segundo cuadrante.

4. Encuentra los valores de las seis razones trigonométricas si $\cot\theta = -\frac{12}{5}$ y

a. θ está en el segundo cuadrante.

b. θ está en el cuarto cuadrante.

5. Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$, encuentra el valor de

$$\frac{\cot^2\theta - \csc^2\theta}{\csc^2\theta + 3}$$

6. Demuestra que si α es un ángulo, entonces

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ con $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$

7. Demuestra la identidad

$\sec\theta - \sec\theta \times \operatorname{sen}^2\theta = \cos\theta$

8. ¿Cuáles de las siguientes parejas que establecen una identidad trigonométrica?

a. $\operatorname{sen}\theta \sec\theta$; $\tan\theta$

b. $\tan\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$; $\sec\theta$

c. $\dfrac{1}{\sec 60° + 60°}$; $\sec 60° + \tan 60°$

9. Para la siguiente identidad, ¿qué valores de α no verifican la identidad?

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$$

Justifica tu respuesta.

Solución de problemas

10. Este es el juego "Parejas trigonométricas", ¿cuáles son las parejas que se pueden establecer, teniendo en cuenta que se juega con las siguientes cartas, y que la idea del juego es emparejar las tarjetas con las identidades equivalentes?

1 $\operatorname{sen}\theta \sec\theta \cot\theta$	2 $\sec^2\theta \csc^2\theta$
3 $\sec^2\theta + \csc^2\theta$	4 1

Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 129 4/09/23 2:55 p. m.

Resolución de triángulos rectángulos

Aprendo

Resolución de problemas con triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo significa determinar la medida de sus tres lados y sus tres ángulos. Con el uso del teorema de Pitágoras, de las razones trigonométricas y de la calculadora, es posible resolver cualquier triángulo rectángulo. Te sugerimos estos pasos:

Paso 1: Realiza una lectura del enunciado del problema fijándote en cada detalle de la situación que se plantea, extrayendo los datos del problema y la o las incógnitas que se tengan. Lo puedes complementar realizando un gráfico que involucre los datos conocidos y las incógnitas.

Paso 2: Reflexiona sobre el proceso matemático a seguir para solucionar el problema.

Paso 3: Una vez definido el camino a seguir, plantea y resuelve las operaciones hasta encontrar el valor de la o las incógnitas dadas.

Ejemplos

1. ¿Cuál es la altura del edificio?

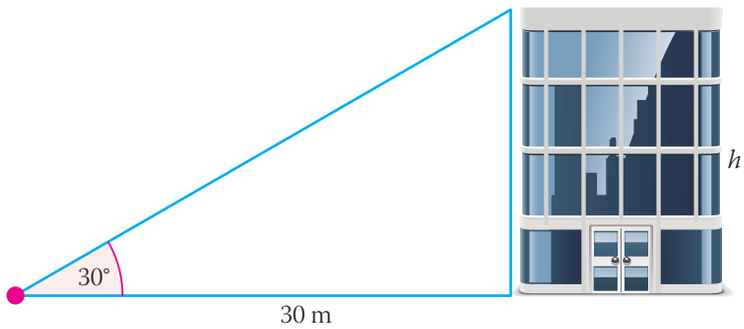
Para conocer la altura del edificio, debemos usar una razón que relacione la altura del edificio h con la distancia conocida 30 m, entonces podemos usar la tangente:

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{30}$$

$$h = 30 \tan 30^\circ$$

$$h = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

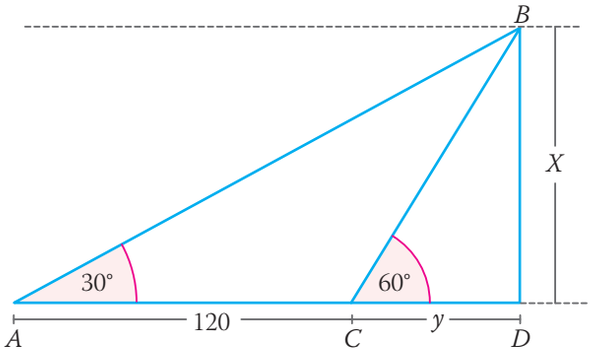
$$h \approx 17{,}32$$



2. Un ingeniero está de pie en la orilla de un río de orillas paralelas y mide, con un teodolito, el ángulo que forma ese punto con un punto B del otro lado del río, luego camina por la orilla 120 m y vuelve a medir el ángulo que forma ese nuevo punto con el punto B y, finalmente, se ubica frente al punto. ¿Cuál es el ancho del río? Con las medidas dadas hacemos el siguiente dibujo:

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{y} \qquad y = \frac{x}{\tan 60^\circ}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{120 + y} \qquad y = \frac{x}{\tan 30^\circ} - 120$$



DBA: Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 130 4/09/23 2:55 p. m.

Igualando tenemos:

$$\frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{x}{\tan 30^\circ} - 120$$

Despejando x obtenemos:

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{3x}{\sqrt{3}} - 120 \quad ; \quad x = 3x - 120\sqrt{3} \quad ; \quad x = \frac{120\sqrt{3}}{2} \approx 103.92$$

Despejando y reemplazando *tan*60° y *tan*30°, obtenemos que x es aproximadamente 104.

Aplico mis conocimientos

Comunicación, razonamiento y solución de problemas

1. La atracción Carritos chocones tiene una tira metálica que conecta con el techo y mide 3 metros, mientras que el carrito mide 2 metros. ¿Qué longitud hay entre el extremo superior de la tira metálica y el extremo delantero del carrito?

2. La tienda de premios del parque de diversiones tiene un techo en forma de triángulo rectángulo, donde se almacenan los muñecos que se obsequian a los niños. La base del techo tiene una longitud de 4 metros y su hipotenusa mide 5 metros. ¿Cuál es la altura del techo?

3. Margarita desea ubicar a su hija que se encuentra perdida en el parque, por lo tanto, se sube al mirador para identificarla, ella nota que su hija se encuentra cerca al lago y desea saber cuántos metros debe caminar para llegar al sitio. Si el mirador tiene 9 metros de altura y la distancia entre la parte más alta del mirador y la hija de Margarita es de 15 metros, ¿cuántos metros debe caminar Margarita desde la base del mirador hasta el lugar donde se encuentra su hija?

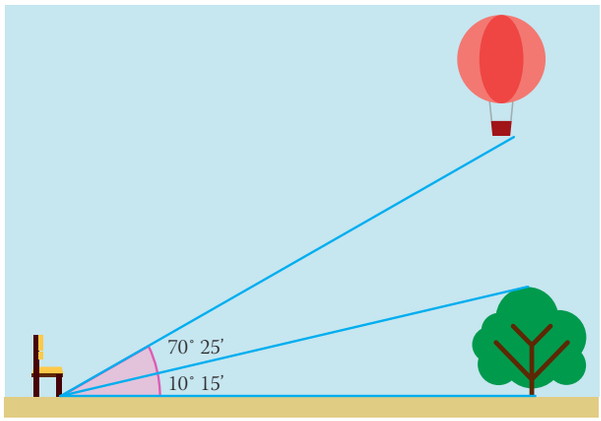
4. Un niño observa desde el piso a un gato que se encuentra sobre la chimenea de una casa. Si el niño se encuentra a 12 metros de la base de la chimenea y la distancia entre el niño y el gato es de 16 metros, ¿cuál es la altura de la chimenea?

5. Completa la siguiente tabla:

Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa
3 centímetros	6 centímetros	
	12 metros	16 metros
6 metros		10 metros
15 centímetros	17 centímetros	
	22 centímetros	25 centímetros

6. Calcula la altura de un triángulo rectángulo que tiene dos lados que miden 3.5 cm y 6 cm.

7. Desde una silla del parque, se puede observar un árbol con un ángulo de elevación de 10° 15' y un globo situado justamente encima del árbol con un ángulo de 70° 25'; si el árbol tiene una altura de 20 metros, calcula la altura en la que se encuentra el globo.



Desempeño: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 131 4/09/23 2:55 p. m.

Cuerpos geométricos

Aprendo

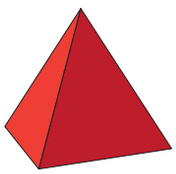
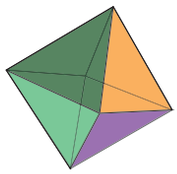
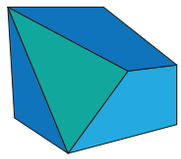
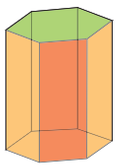
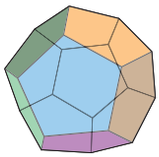
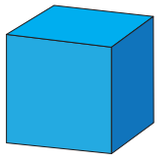
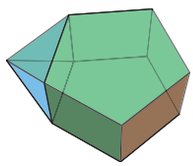
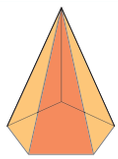
Poliedros y su clasificación

Poliedros: construcción sólida que en cada una de sus caras contiene un polígono, ya sea cóncavo o convexo. En los poliedros, la intersección de 2 caras se conoce con el nombre de **arista**, y la intersección de 3 caras es el **vértice**.

Por otro lado, los poliedros se pueden clasificar en regulares e irregulares. Los **regulares** son los que están conformados por caras de polígonos todos regulares, mientras que, en los **irregulares**, la conformación de sus caras tiene al menos un polígono irregular.

Para nombrarlos se tiene en cuenta el número de caras que lo conforman, finalizando con la palabra regular si es el caso, de lo contrario solo se nombran los lados **(hexaedro, octaedro, icosaedro)**, utilizando el mismo prefijo de los polígonos pero con la terminación ***-edro***.

Veamos unos ejemplos:

Poliedros regulares		Poliedros irregulares	
			
4 caras = Tetraedro regular	8 caras = Octaedro regular	8 caras = Octaedro	8 caras = Octaedro
			
12 caras = Dodecaedro regular	4 caras = Cubo	11 caras = Hendecaedro	6 caras = Hexaedro

Poliedros especiales. Área y volumen

Prisma

Poliedro especial y fundamental en las construcciones de todo tipo, como edificaciones, bases, columnas etc., se caracteriza porque se compone de 2 polígonos paralelos congruentes que son sus bases y, perpendicular a estas, las caras laterales que están conformadas por paralelogramos. Su clasificación se denota según el polígono de su base.

Área: el área total de un prisma es la suma del área lateral (AL) y el área de sus bases (AB).

$$A_T = 2A_B + A_L$$

Volumen: el prisma se caracteriza porque su volumen es la multiplicación entre el área de su base y su la altura.

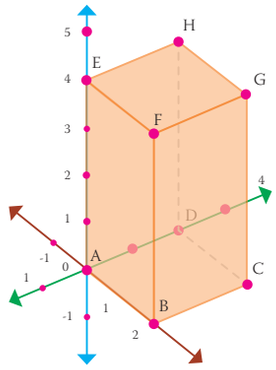
$$V = (A_B) \cdot h$$

DBA: Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

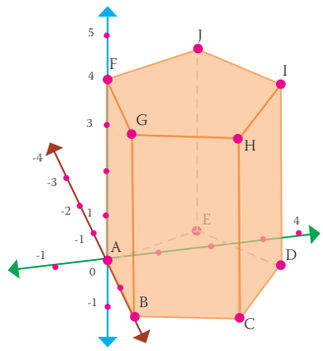
L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 132 4/09/23 2:55 p. m.

Componente: Métrico-geométrico

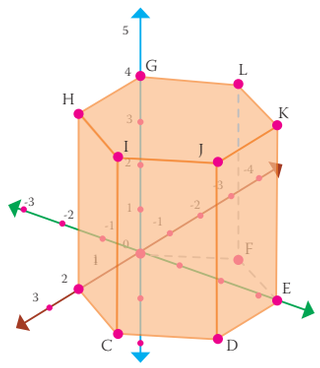
Observemos algunos prismas.



Prisma tetragonal recto



Prisma pentagonal recto



Prisma hexagonal recto

Pirámides

Poliedro caracterizado por que tiene un polígono regular en su base, y sus caras son triángulos que confluyen en un único punto en común, (vértice común).

Las **pirámides rectas** están conformadas por triángulos isósceles en sus caras y las **pirámides oblicuas** están conformadas como mínimo, en una de sus caras, por un triángulo escaleno.

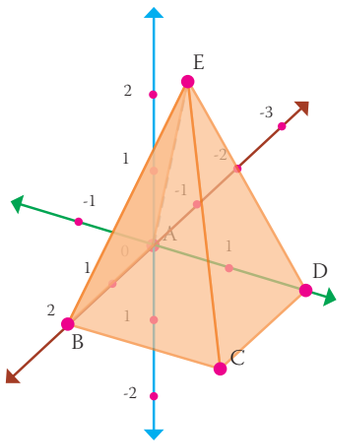
Área superficial: es la suma de las áreas de todas sus caras laterales, incluyendo las de la base.

Volumen: por construcción geométrica, el volumen para una pirámide recta viene dado por la siguiente expresión:

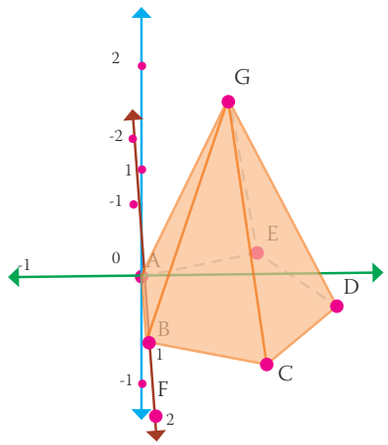
$$V = \frac{1}{3}\left(A_{Base} \text{ x } h\right)$$

La altura h de la pirámide se determina a partir del uso del teorema de Pitágoras, cuya hipotenusa es la altura de un triángulo de sus caras laterales.

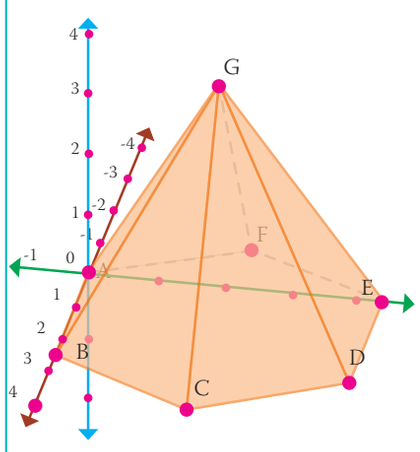
A continuación, observamos ejemplos de algunas pirámides:



Pirámide recta cuya base es un polígono cuadrilátero.



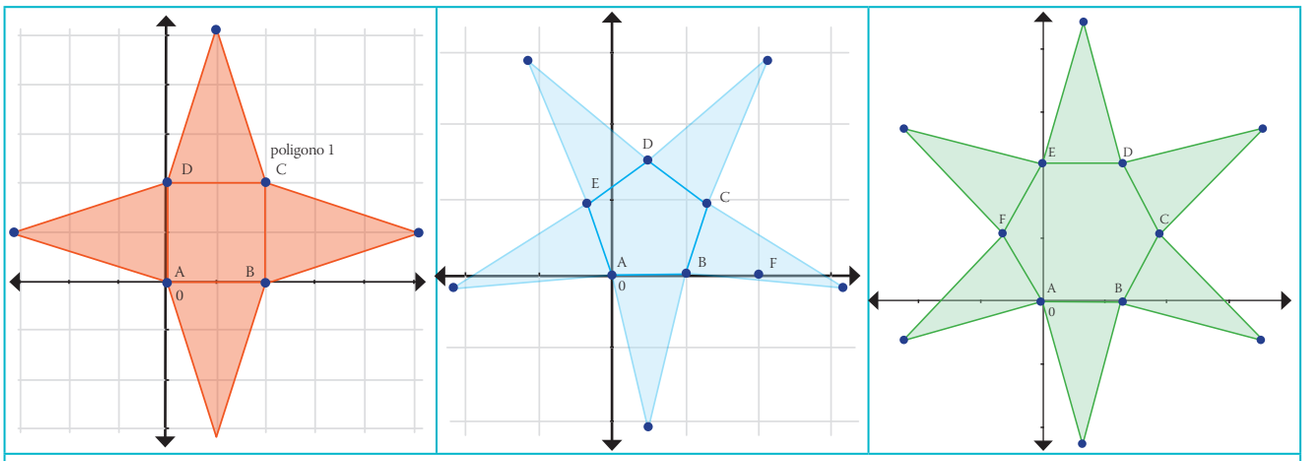
Pirámide regular cuya base es un pentágono regular.



Pirámide regular recta cuya base es un hexágono regular.

Desempeño: Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 133 4/09/23 2:55 p. m.

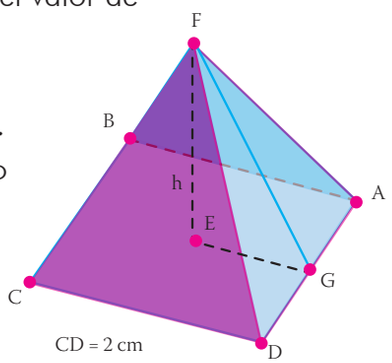


Representaciones en el plano del desarrollo o desarme del sólido

Ejemplo

Determina el área y el volumen de una pirámide regular recta cuya base es un cuadrado de lado 2 cm, y sus caras laterales están formadas por triángulos equiláteros.

Proceso 1: Para determinar el área total, necesitamos hacer uso de la expresión $A_T = \frac{p \cdot a}{2} + A_{Base}$, los datos que se tienen como conocidos son el valor de $A_{Base} = (2\text{ cm} \times 2\text{ cm}) = 4\text{ cm}^2$.



El perímetro es la suma de los lados de la base: $p = (2 \times 4) = 8$ cm. Finalmente, la única medida que no tenemos es la altura del triángulo de una de sus caras. Para este caso, aplicaremos el teorema de Pitágoras para el ΔAFG.

$\overline{AF} = 2\ cm \quad \overline{GA} = 1\ cm$, la hipotenusa y un cateto se aplican en el teorema de Pitágoras, así:

$$\overline{FG} = \sqrt{(2cm)^2 - (1cm)^2} = \sqrt{3cm^2} = 1.73\ cm$$

Hallando el área, tenemos:

$$A_t = \frac{(8cm \times 1.73cm)}{2} + 4\ cm^2 = 10.92\ cm^2$$

Proceso 2: Para el volumen, es necesario conocer la altura de la pirámide, la cual está delimitada por los puntos FE. Nótese que se aplica el teorema de Pitágoras al ΔFEG y sus catetos:

$$\overline{EG} = 1cm \quad \overline{FG} = 1.73\ cm$$

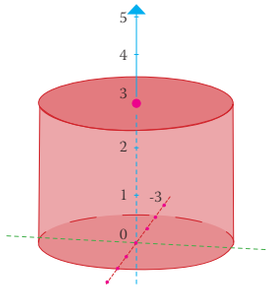
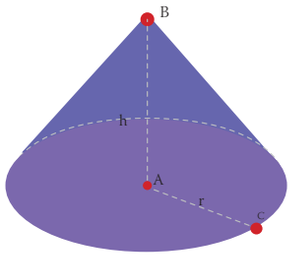
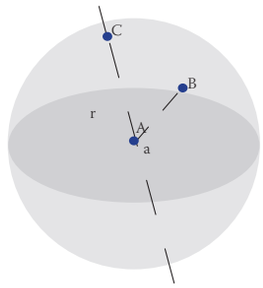
$$\overline{FE} = \sqrt{(1.73cm)^2 - (1cm)^2} = \sqrt{0.73cm^2} = 0.85\ cm = h$$

Aplicando la expresión del volumen:

$$V = \frac{1}{3}(4cm^2 \times 0.85\ cm) = 1.13\ cm^3$$

DBA: Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 134 4/09/23 2:55 p. m.

Cilindro	Cono	Esfera
		
Características		
Similar a la conformación de un prisma, es un cuerpo redondo cuyas bases son paralelas y congruentes, en este caso la base es circular. **Volumen:** $A_{Base} \times h = (\pi r^2 \bullet h)$ Donde h es la altura y r el radio de la base. **Área:** $2(\pi r^2)+(2\pi r.h)$	Cuerpo redondo con una base circular, un vértice (B) y generatriz **g** (BC). **Volumen:** $\frac{1}{3}\ \pi.r^2.h$ **Área$_L$** = $\pi.r.g$ **A_{cono} = A_l + A_b** **A_{cono}** = $\pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$	Una esfera es un cuerpo redondo que se obtiene a partir de la revolución de un semicírculo por su radio. Todos los puntos que se ubiquen en el extremo de la esfera son equidistantes al centro de la esfera y esta medida es el radio r. **Volumen:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ **Área:** $4\pi r^2$

Ejemplo

La figura muestra la forma de un tanque que transporta gas. Esta formado por un cilindro unido a dos semiesferas. Las semiesferas y el cilindro tienen radio 1.5 metros y el cilindro tiene 5 metros de largo. ¿Cuánto es el volumen de gas que puede transportar este tanque?



Solucion: Para hallar el volumen total, debes calcular el volumen de cada una de las partes y sumar los resultados. Como tiene dos semiesferas, puedes calcular el volumen de una esfera completa.

$$V_{cil} = \pi r^2 h = 3.14 \times (1.5)^2 \times 5 = 35.34\ m^3$$

$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot (1.5)^3 = 14.13 m^3$$

Entonces

$$35.34 + 14.13 = 49.47 m^3$$

El volumen total de gas que puede transportar este tanque es $49.47 m^3$

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 135 4/09/23 2:55 p. m.

Aplico mis conocimientos

Comunicación y razonamiento

1. Completa las tablas para cada uno de los poliedros regulares que se nombran, y la respectiva información del poliedro.

Poliedro: prisma recto regular (h = 3 cm)		
Base	Área	Volumen
Cuadrada de lado 2 cm.		
Rectangular de largo y ancho 8 cm y 2 cm.		
Triangular, equilátero de lado 3 cm.		
Cuadrada		27 cm^3

Poliedro: pirámide regular h = 3cm		
Base	Área	Volumen
Triangular equilátero 2 cm		
Cuadrada lado 2 cm		
		10 cm^3

2. Para el punto anterior, realiza a escala los poliedros con sus respectivas medidas y formas. Puedes ayudarte de un programa geométrico.

3. Responde verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

a. Los poliedros oblicuos son aquellos que no son regulares. ☐

b. Las pirámides regulares son aquellas en las que su base es un triángulo regular. ☐

c. El área de un poliedro se determina sumando el área de sus caras incluyendo su base. ☐

d. Las caras de una pirámide con cualquier base son triángulos congruentes. ☐

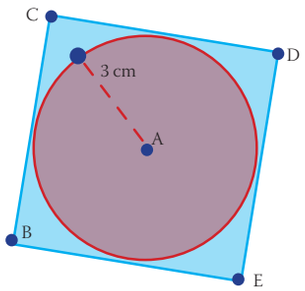
e. La altura de una pirámide es equivalente a la altura de uno de sus triángulos laterales. ☐

4. Utiliza tu razonamiento para determinar la altura de:

Información	Altura
Prisma cuya base es un cuadrado de 3 cm de lado y cuyo volumen es 100 cm^3.	
Cilindro cuya área total es 120 cm^2 y el área de la base es 12cm^2.	
Pirámide de base cuadrada de lado 3 cm y todas sus caras están conformadas por triángulos equiláteros congruentes.	
Pirámide de base cuadrada, cuya diagonal equivale a 33,94 cm, y la pirámide está conformada por triángulos isósceles cuyo lado es 37 cm.	

Solución de problemas

5. Se desea almacenar una esfera de radio 2 cm en una caja prismática utilizando la menor cantidad de material. Determina:



a. El valor del lado de la caja.

b. El área y el volumen de la caja.

c. La mínima cantidad de espacio vacío que queda en la caja después de almacenar la esfera.

6. La policía ha decomisado 10 lingotes, al parecer de oro, los cuales tienen una base trapezoidal de área 10 cm^2 y altura 5 cm. El teniente pesa en una gramera los 10 lingotes para un total de 9 kg. Si se conoce que la densidad del oro es 19.3 g/cm^3, ¿es posible saber si son de oro? Justifica tu respuesta.

7. Al introducir un cono en un cilindro por la base, se evidencia que hay un sector que no se ocupa del cilindro. Determina el volumen no ocupado por el cono si la base y la altura del cono del cilindro son iguales. Datos: radio (r) y altura (h).

DBA: Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 136 4/09/23 2:55 p. m.

Componente: Aleatorio

Probabilidad

Aprendo

Espacio muestral: es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se denota S.

Ejemplo

En una familia hay 3 hijos. El espacio muestral que representa esta situación es:

$$S = \{HHH, HHM, HMH, HMM, MHH, MHM, MMH, MMM\}$$

Regla de Laplace

Dado un experimento aleatorio, la probabilidad de ocurrencia de un evento E, notada $P(E)$, es:

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)}$$

Donde $\#(E)$ es el número de elementos del evento o número posible de casos favorables y $\#(S)$ es el número de casos totales o posibles.

Para cualquier evento E, la probabilidad siempre es menor o igual a 1, esto es, $0 \leq P(E) \leq 1$.

Ejemplo

En un salón de clase hay 42 alumnos, de los cuales 29 son mujeres y el resto hombres.

a. ¿Cuál es la probabilidad de elegir a una mujer en este salón?

Llamaremos M el evento **ser mujer**.

$$P(M) = \frac{29}{42} = 0.69$$

b. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un hombre?

Primero debemos conocer cuál es la cantidad de hombres del grupo, sabiendo que el espacio muestral es la totalidad de estudiantes, esto es, 42 – 29 mujeres = 13 hombres.

$$P(H) = \frac{13}{42} = 0.31$$

Recuerda que...

La suma de las probabilidades de todos los eventos elementales de un espacio muestral es 1.

Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

Dos o más sucesos son mutuamente excluyentes si la ocurrencia de uno de los sucesos imposibilita la ocurrencia de los otros.

Si dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que el uno o el otro ocurran es igual a la suma de sus respectivas probabilidades, esto es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Desempeño: Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 137 4/09/23 2:55 p. m.

Ejemplo

De los estudiantes de una facultad de derecho, 30 % son de primer año, 35 % de segundo año, 20 % de tercer año, 10 % de cuarto año y el resto de estudiantes de quinto año. Si uno de los estudiantes de esa facultad se ganó un premio de veinte millones de pesos, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante sea de primero o de segundo año?

Representaremos con A el evento en el que estudiante sea de primer año y con B el evento en el que el estudiante sea de segundo año.

Tenemos:

La probabilidad de que el estudiante ganador sea de primero o segundo año es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}30 + 0{,}35 = 0{,}65$$

La probabilidad de que el ganador sea de primer o segundo año es del 65 %.

Aplico mis conocimientos

Comunicación, razonamiento y solución de problemas

1. Para proveer doce cargos en una nueva entidad del estado hay veinte candidatos, diez hombres y diez mujeres. Si se escoge una persona, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar un dado, salga un 2 o un 4?

3. Un mago le da a escoger una carta, de un grupo de cinco, a un espectador en una función, pero todas las cartas son iguales, ¿se puede considerar el escoger la carta como un experimento aleatorio?

4. Una urna contiene cinco bolas rojas, tres verdes y dos azules. Si se extrae una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta no sea roja?

5. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número primo?

6. Una urna contiene bolas de tres colores: blanco, azul y verde. Al extraer una al azar, la probabilidad de que salga blanca es el doble de que salga azul, y la probabilidad de que salga azul es el doble de que salga verde. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una verde?

7. Un encuestador ha entrevistado a 400 amas de casa sobre compras en un supermercado. En una de las preguntas que realiza, averigua por el tipo de comida que prefiere en su hogar: vegetariana, no vegetariana o vegana. Si el 35 % de las encuestadas prefiere la comida vegetariana, ¿cuál es la probabilidad de que las encuestadas compren comida no vegetariana?

8. Si observamos el calendario y nos fijamos en el presente mes, ¿cuál es la probabilidad de que, al escoger un día, este sea martes?

9. En una reunión familiar se encuentran presentes treinta personas, diez son hombres, doce son mujeres y las demás son niños. Si se escogen dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean una mujer y un niño?

10. Las probabilidades de que 0, 1, 2, 3, 4 o más clientes pidan determinado artículo de los estantes en un supermercado cierto día son, respectivamente, 0.10, 0.40, 0.30, 0.15, y 0.05. Determina la probabilidad de que

a. ningun cliente pida el artículo.

b. al menos dos clientes pidan el artículo.

c. a lo sumo tres clientes pidan el artículo.

d. al menos un cliente pida el artículo.

DBA: Encuentra el número de posibles resultados de experimentos aleatorios, con reemplazo y sin reemplazo, usando técnicas de conteo adecuadas, y argumenta la selección realizada en el contexto de la situación abordada. Encuentra la probabilidad de eventos aleatorios compuestos.

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 138 4/09/23 2:55 p. m.

Resolución de sistemas de ecuaciones 2 x 2 en Geogebra

Aprendo

1. Usa la herramienta de texto 

para ingresar el título de tu aplicación.

2. En la barra de entrada introduce, uno a uno, seis valores cualesquiera. En vista algebraica verás que el mismo software le asigna las letras a, b, c, d, e, f.

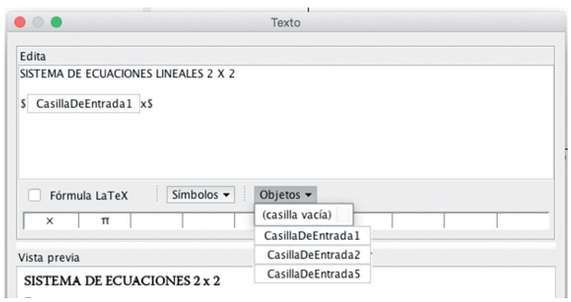
3. Usando la herramienta "Entrada" 

crea, de igual forma, seis casillas de entrada, a cada casilla se le coloca un nombre y se le asigna un valor, se sugiere que se nombren $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ en donde a a_{11} se vincula con el objeto a, a a_{12} se vincula con el objeto b y así sucesivamente.

   Se sugieren los anteriores nombres ya que el sistema que se quiere resolver es de la forma:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

4. Crea un texto con el código que se muestra en la siguiente imagen:



5. En la barra de entrada calcula los tres determinantes que se van a utilizar:

   El primer determinante se nombra *"det"* y se encuentra escribiendo en la barra de entrada *det=a*d-b*c.*

   El segundo determinante se nombra *"det1"* y se encuentra escribiendo en la barra de entrada *det1=e*d-b*f.*

   El tercer determinante se nombra *"det2"* y se encuentra escribiendo en la barra de entrada *det2=a*f-e*c.*

   Recuerda que para el sistema

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

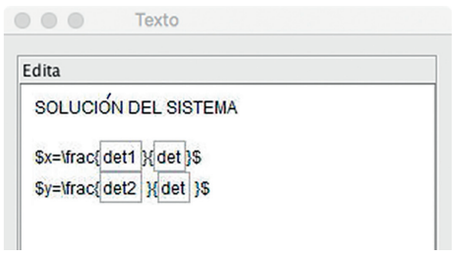
   se utilizan los determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

   cuyos resultados se calculan como sigue:

$$D = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}, D_1 = b_1 * a_{22} - a_{12} * b_2, D_2 = a_{11} * b_2 - b_1 * a_{21}$$

6. Finalmente, creas un "texto" con el código que muestra la siguiente imagen:



Lo que mostrará es la solución del sistema

Practica y aplica

Resuelve los siguientes sistemas utilizando la herramienta que has desarrollado.

a. $\begin{cases} 2y + x = 3 \\ 3y + x = 7 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2y + x = 13 \\ 2y + 2x = -2 \end{cases}$

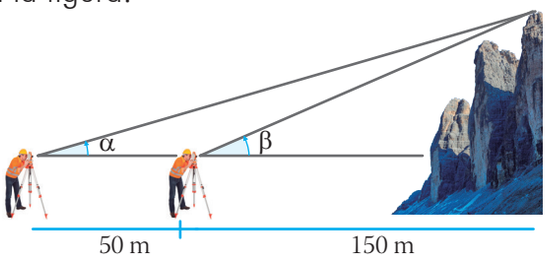
c. $\begin{cases} 6y + 3x = 33 \\ 3y + 2x = 17 \end{cases}$

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 139 4/09/23 2:55 p. m.

Evaluación tipo Saber
y plan de mejoramiento

Contesta las preguntas 1 y 2 utilizando la siguiente información:

Un ingeniero que está a 200 m de la base de una montaña observa con un teodolito la cima de la montaña con un ángulo de elevación α, luego se acerca 50 m y el nuevo ángulo de elevación es β, como se muestra en la figura:



1. La relación entre los ángulos α y β es

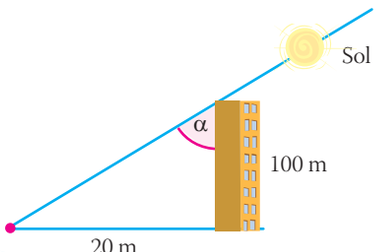
A. $\alpha+\beta=180°$
B. $0°<\alpha<\beta<90°$
C. $\alpha=\beta$
D. $0°<\beta<\alpha<90°$

2. Si el teodolito está a 1.8 m del suelo, ¿cuál es la altura h de la montaña expresada en función del ángulo α?

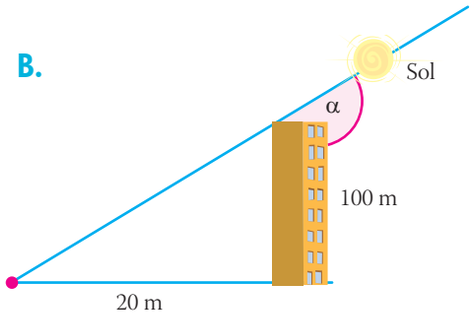
A. $h=200\ \tan\alpha+1.8$
B. $h=200\ \tan\alpha$
C. $h=50\ \text{sen}\alpha+1.8$
D. $h=200\ \text{sen}\alpha$

3. Un edificio de 100 m de altura proyecta una sombra de 20 m de longitud. La representación que muestra correctamente el ángulo α de elevación del Sol en ese momento es

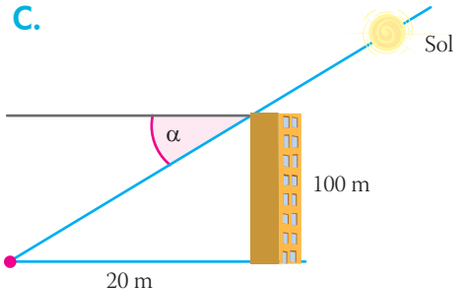
A.



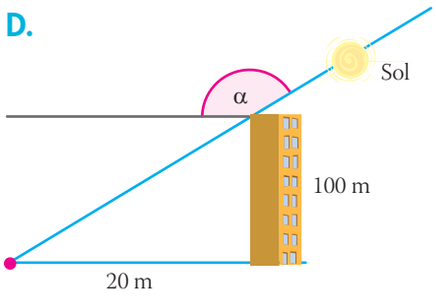
B.



C.



D.



4. María escribe tres propiedades en el tablero:

I. $\text{sen}\ \alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
II. $\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha=1$
III. $\text{sen}^2\alpha=1+\cos^2\alpha$

Son ciertas las propiedades

A. I y II
B. todas son ciertas
C. solamente la II
D. I y II

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 140 4/09/23 2:55 p. m.

5. Las características de los poliedros regulares permiten identificar el tipo y la clasificación de un determinado poliedro. La afirmación que no representa una característica de los poliedros es

A. un poliedro regular posee una base con un polígono regular.
B. la base cuadrada de una pirámide define el nombre de la misma y, en este caso, sería un tetraedro.
C. un poliedro oblicuo cuyo eje transversal forma un ángulo de 90° con su base.
D. las caras de una pirámide están conformadas por triángulos congruentes.

6. Los cuerpos redondos se caracterizan por la relación con el número π, tanto para su área como para su volumen. Es correcto deducir que la razón del volumen con respecto al área de una esfera de radio r es

A. $\frac{1}{3}r$ **B.** $\frac{1}{3}r^2$ **C.** $\frac{1}{4}r$ **D.** $\frac{1}{4}r^2$

7. Se puede deducir que la razón entre el volumen del cilindro y un cono con bases y alturas congruentes es

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** 2 **D.** 3

8. Con relación a lo que se encontró respecto al volumen de la esfera y el cono, la afirmación que más se acerca a lo obtenido es:

A. La capacidad de un cilindro es el triple de la de un cono.
B. La capacidad del cilindro es la sexta parte de la de un cilindro.
C. Caben 2 conos en un cilindro y no sobraría espacio.
D. Los cilindros y los conos son cuerpos geométricos redondos.

9. Entre los estudiantes de grado noveno de una institución educativa, se realizó una encuesta para determinar el número de mujeres y hombres que practican algún deporte en su tiempo libre. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

	Hombres	Mujeres
Practican algún deporte	25	15
No practican deporte	10	20

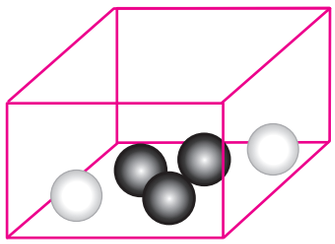
¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar, que curse grado noveno, este sea una mujer que practica algún deporte?

A. $\frac{15}{70}$ **B.** $\frac{15}{55}$ **C.** $\frac{15}{25}$ **D.** $\frac{15}{20}$

10. Se colocan en una bolsa 6 balotas azules, 3 rojas, 5 verdes y 7 blancas. Al extraer una balota de la bolsa, la probabilidad de que la balota que salga sea

A. blanca es mayor a la probabilidad de que sea azul.
B. azul es menor a la probabilidad de que sea roja.
C. roja es mayor a la probabilidad de que sea verde.
D. verde es mayor a la probabilidad de que sea blanca.

Responde la pregunta 11 de acuerdo a la siguiente información:
Una caja contiene 5 bolitas, dos de ellas blancas y el resto negras. Se extraen de la caja sin mirar 2 bolitas al azar en forma consecutiva.



11. La probabilidad de que la segunda sea una bolita negra cuando no se hace devolución de la primera es

A. 0.5 **B.** 0.7 **C.** 0.6 **D.** 0.4

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 141 4/09/23 2:55 p. m.

Bibliografía

AYRES, F. Trigonometría Plana y Esférica. Madrid: McGraw – Hill, 1989.

BATANERO, C. & GODINO, J. Estocástica y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. Granada: Universidad de Granada, 2002.

ESPEJO, M., FERNÁNDEZ M,. LÓPEZ M., MUÑOZ, A. M. RODRÍGUEZ, A., SÁNCHEZ, C. & VALERO, C. Estadística descriptiva y probabilidad. Teoría y problemas. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2006.

MEN. Matemáticas Lineamientos Curriculares. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, 1998.

MEN. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá, Ministerio de Educación Nacional, 2006.

OBONAGA, E. PEREZ, J. Y CARO, V. Matemáticas 4: Algebra y Geometría. Bogotá: PIME editores, 1984.

SPIEGEL, M. Estadística. Madrid: Mc Graw Hill Interamericana, 1991.

TAHAN, M. Matemáticas Divertida y Curiosa. Madrid: RBA editores, 2009.

VESGA, G. Enlace Matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial EDUCAR, 2014.

WALPOLE, R., MYERS, R., MYERS, S. & YE, K. Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. Ciudad de México: Pearson Educación, 2012.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/funciones_lineales_y_afines_dhafj/funcion_lineal_y_afin1.html

https://www.ine.gob.gt

https://mem.gob.gt/historico-precios-nacionales/

L9_Unidad_4_2021 Indiv.indd 142 4/09/23 2:55 p. m.

Notas

Notas